

Introduzione alla meccanica statistica del non equilibrio.

Anno Accademico 2020/2021

Lezione 1

- Richiami di teoria delle probabilità: spazio dei campioni; risultati; eventi; eventi mutualmente esclusivi; interpretazione della probabilità basata sulla frequenza; assiomi di Kolmogorov; sigma-algebre; spazi di probabilità; probabilità congiunte; eventi indipendenti.
- Variabili random; medie di variabile random; sigma-algebra indotta da una variabile random; applicazione: calcolo della PDF della energia interna di un gas in contatto con un termostato.
- PDF e medie condizionate; composizione di probabilità; distribuzione marginale; teorema di Bayes.

Lezione 2

- Connessione fra concetto di variabile random come funzione da uno spazio di probabilità alla retta reale, e variabili macroscopiche come realizzazione macroscopica di stati microscopici di un sistema; concetto di misurabilità; cambi di variabile di PDF; momenti di una PDF; distribuzioni a code pesanti; funzione generatrice dei momenti; funzione indicatrice; medie condizionate come variabili random.
- Connessione tra funzione generatrice dei momenti e funzione di partizione in meccanica statistica; applicazione: il teorema fluttuazione dissipazione; uso della funzione generatrice nel trattamento di somme di variabili random; cumulanti; funzione generatrice dei cumulanti.
- Medie campionarie; legge dei grandi numeri; legame con il concetto di limite termodinamico; applicazione: fluttuazioni dell'energia interna di un gas in contatto con un termostato; teorema del limite centrale (caso Gaussiano); il cammino random; diffusività.

Lezione 3

- **Esercitazione 1**

Lezione 4

- Medie campionarie di distribuzioni a media infinita; necessità di un cutoff; la distribuzione lognormale come esempio di distribuzione con code localmente pesanti; la legge di Pareto.
- Distribuzioni di Lévy; applicazioni: diffusione anomala; voli di Lévy; continuous time random walk;

- Deviazioni dalla Gaussiana della somma di variabili i.i.d. con media e varianza finite nel caso di eventi di grande ampiezza.

Lezione 5

- Campi random; funzioni di correlazione; PDF funzionale; funzionale generatore delle correlazioni; uso di integrali e derivate funzionali.
- Campi random con statistica spazialmente omogenea; passaggio da rappresentazione in spazio reale a spazio di Fourier; spettro di fluttuazioni; teorema di Wiener-Khinchin; costruzione delle PDF funzionale e del funzionale generatore delle correlazioni di un campo random Gaussiano; esempio: il rumore bianco.

Lezione 6

- **Esercitazione 2**

Lezione 7

- Funzioni di correlazioni connesse e loro funzionale generatore; teorema di Isserlis; proprietà di clustering.
- Processi stocastici; il ruolo del tempo; filtraggi; processo adapted.
- Processi di Markov; probabilità di transizione; catene di Markov; matrice stocastica; processi indipendenti dal tempo; distribuzione d'equilibrio.
- Medie temporali; tempo di correlazione; proprietà ergodica.

Lezione 8

- Equazione di Chapman-Kolmogorov; equazione Master; applicazione al cammino random e a processi di decadimento; equazione di diffusione; equazioni dei momenti.
- Decomposizione di Doob; martingale.
- Equazione di Langevin; il moto Browniano.

Lezione 9

- **Esercitazione 3**

Lezione 10

- Proprietà di crossing di martingale.
- Il processo di Wiener.
- Decomposizione di Itô di un processo stocastico; integrale di Stieltjes; integrale di Itô; equazione differenziale stocastica alla Itô.

- Lemma di Itô; calcolo differenziale alla Itô; applicazioni: equazione del trasporto del calore.

Lezione 11

- Equazione di Kolmogorov “backward” ed equazione di Fokker-Planck.
- Limitazioni dell’uso di equazioni differenziali stocastiche nel caso di sistemi discreti.
- Equazioni differenziali stocastiche con rumore correlato; equazioni differenziali stocastiche alla Stratonovich; calcolo differenziale alla Stratonovich; correzione di Zakai-Wong.
- Processi reversibili; bilancio dettagliato (cenni).

Lezione 12

- **Esercitazione 4**