Introduzione alla meccanica statistica del non equilibrio
Anno Accademico 2020/2021

Lista 4. – Consegna: Lezione 12

Esercizio 1 Si utilizzi il lemma di Itô per scrivere l'equazione di Langevin

$$\dot{x}_i + \Gamma x_i = (2D)^{1/2}\xi_i, \qquad \langle \xi_i(t)\xi_j(0)\rangle = \delta_{ij}\delta(t), \tag{1}$$

dove x_i, $i = 1, 2, 3$ sono coordinate cartesiane, in coordinate polari sferiche r, θ, ϕ. Si utilizzi il risultato per scrivere l'equazione per il ruotatore Browniano simmetrico, cioè l'equazione del moto in coordinate θ, ϕ per l'orientazione del asse di simmetria del corpo sotto l'azione del rumore termico e dell'attrito viscoso.

Esercizio 2 Riprendere l'esercizio 2 della lista 3. Scrivere l'equazione differenziale stocastica e l'equazione di Fokker-Planck che realizzano il limite continuo del modello SIR in presenza di fluttuazioni. Determinare le curve epidemiche $I(t)$ ed $R(t)$ integrando numericamente il modello SIR stocastico ottenuto e quello originale; potrebbe essere un'idea utilizzare i parametri di qualche focolaio COVID tipo Vo' Euganeo.

Esercizio 3 Si consideri un camminatore random in $D = 1$, che esegue passi discreti di ampiezza Δx ogni intervallo di tempo Δt con una probabilità di salto $P(n + 1|n) = P(n-1|n) = \kappa\Delta t/(\Delta x)^2$. Il camminatore è posto in un dominio finito con pareti assorbenti a $n = \pm N$; questo significa che se il camminatore raggiunge la casella $n = N$ o quella $n = -N$, è eliminato dal dominio.

- Scrivere l'equazione master che descrive il sistema, imponendo le appropriate condizioni al contorno ad $n = \pm N$.
- Eseguire il limite continuo e ottenere l'equazione di diffusione nel dominio considerato imponendo le appropriate conditioni al contorno ad $x = \pm N\Delta x$.
- Il sistema ha come unico stato stazionario $\bar{\rho}(x) = 0$ (camminatore assorbito con certezza da una delle pareti. Se il dominio è grande ci si può però aspettare uno stato metastabile $\rho_M(x, t) \simeq \rho_M(x)P(t)$, dove $P(t)$ è la probabilità che il camminatore non sia stato assorbito e la PDF condizionata $\rho_M(x)$ è indipendente dal tempo.
- Si determini $\rho_M(x)$ ponendo in prima approssimazione nella equazione per $\rho_M(x, t)$ $\dot{P} = 0$.
- Si determini la corrente diffusiva alle pareti prodotta da $\rho_M(x, t)$ e si stimi il tasso di decadimento $\Gamma_a = \dot{P}/P$.