Introduzione alla meccanica statistica del non equilibrio

Anno Accademico 2020/2021

Lista 2. – Consegna: Lezione 6

Esercizio 1 Sia x_n una serie random, con funzione di correlazione $\langle x_n x_m \rangle = C(n-m)$, con $C(0) < \infty$ e $C(n \gg 1) \sim n^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Stimare l'errore nell'approssimazione $\langle x \rangle \simeq \langle x \rangle_N$. (Suggerimento: adattare al presente caso la derivazione della legge dei grandi numeri).

Esercizio 2 Sia x una variabile aleatoria a media nulla, varianza finita e momenti $M_n = \infty$ per $n \geq 4$. Il teorema del limite centrale dice che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(N^{1/2} \langle x \rangle_N / \sigma_x = y) := \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(y) = \pi^{-1/2} \exp(-y^2/2).$$

Ma la somma di variabili con momento M_n infinito deve avere essa stessa momento infinito. Come si concilia questo con il fatto che la Gaussiana ha tutti i momenti finiti? Ha questo conflitto qualcosa a che fare con il fatto che per ogni N , l'approssimazione Gaussiana per $g_N(y)$ peggiora all'aumentare di y ? Stimare una soglia $y(N)$ tale che per $y \gg y(N)$ le code di g_N ridiventino “pesanti”.

Esercizio 3 Il cammino random e il suo limite continuo il processo di Wiener, sono ottenuti supponendo che il camminatore effettui spostamenti indipendenti ad istanti successivi. Il risultato è una legge diffusiva per lo spostamento cumulativo su intervalli di tempo macroscopici $\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle = Dt$, $t \gg \Delta t$, dove Δt è il tempo fra passi successivi.

- Come cambia il risultato se invece di passi indipendenti, salti ad istanti discreti diversi $\Delta x(t_i)$ hanno una correlazione $\langle \Delta x(t_i) \Delta x(t_j) \rangle = C(t_i - t_j)$ con tempo di correlazione finito? (Suggerimento: dare un'occhiata alla discussione della proprietà ergodica).
- Mostrare che se $C(t) \propto |t|^{-\gamma}$ con $0 < \gamma < 1$ (quindi il tempo di correlazione degli incrementi è infinito), lo spostamento cumulativo obbedisce una legge così detta superdiffusiva, $\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle \propto |t|^\beta$, $\beta > 1$. Si valuti β .