Funzione generatrice di PDF a coda pesante

Consideriamo una PDF definita per x positivi e con comportamento a grandi x

$$\rho(x) \sim x^{-1-\gamma}, \qquad 0 < \gamma < 1. \tag{1}$$

Vogliamo determinare il comportamento della funzione generatrice associata $Z(J)$ per $J \to 0$. Siccome ρ è definita per x positivi, possiamo calcolare Z lungo l'asse immaginario. Il calcolo di Z si risolve pertanto nell'esecuzione di una trasformata di Laplace, che può essere scritta come la somma di due termini

$$\begin{aligned} Z(J) &= \int_0^{\bar{x}} \mathrm{d}x \; \rho(x)\mathrm{e}^{-Jx} + \int_{\bar{x}}^{+\infty} \mathrm{d}x \; \rho(x)\mathrm{e}^{-Jx} \\ &= F(J) + \int_{\bar{x}}^{+\infty} \mathrm{d}x \; \Big\{ [(R(x)\mathrm{e}^{-Jx}]' + JR(x)\mathrm{e}^{-Jx} \Big\}, \\ &= F(J) - R(\bar{x})\mathrm{e}^{-J\bar{x}} + J \int_{\bar{x}}^{+\infty} \mathrm{d}x \; R(x)\mathrm{e}^{-Jx}, \end{aligned} \tag{2}$$

dove $\bar{x}$ è scelta a destra di eventuali singolarità in ρ, $F(J)$ è analitica in $J = 0$, $R'(x) = \rho(x)$ con $R(x \to \infty) = 0$, e nella formula abbiamo integrato per parti. Abbiamo evidentemente il comportamento a grandi x

$$R(x) = bx^{-\gamma} + \phi(x) \tag{3}$$

dove $\phi(x) = o(x^{-\gamma})$; possiamo quindi trovare costanti $\delta > \gamma$ e $c > 0$, tali che si abbia per $x > \bar{x}$

$$|\phi(x)| < cx^{-\delta}, \tag{4}$$

e l'ultimo termine nella (2) può essere approssimato da

$$\begin{aligned} &bJ \int_{\bar{x}}^{+\infty} \mathrm{d}x \; x^{-\gamma}\mathrm{e}^{-Jx} = bJ^{\gamma} \int_{J\bar{x}}^{+\infty} \mathrm{d}y \; y^{-\gamma}\mathrm{e}^{-y} \\ &= bJ^{\gamma} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \; y^{-\gamma}\mathrm{e}^{-y} + O(J^{1+\gamma}) = b\Gamma(1-\gamma)J^{\gamma} + O(J^{1+\gamma}). \end{aligned} \tag{5}$$

L'errore si calcola nello stesso modo a partire dalla (4) e troviamo una correzione che sarà $o(J^{\delta})$ oppure $o(J)$ a seconda che $\delta < 1$ o $\delta > 1$. Essendo i termini rimanenti $F(J)$ e $R(\bar{x})\mathrm{e}^{-J\bar{x}}$ analitici in $J = 0$, poiché sappiamo che $Z(0) = 1$, troviamo quindi

$$Z(J) \simeq 1 + b\Gamma(1-\gamma)J^{\gamma}. \tag{6}$$