

Correzione simulazione della prova d'esame

5 luglio 2016

Aula virtuale

Due gusci sferici concentrici, conduttori e separati da vuoto, con $R_1=35$ cm, $R_2=45$ cm, hanno cariche eguali ed opposte, e la differenza di potenziale tra di essi è 65 kV.

1. Calcolare carica, capacità, ed energia elettrica immagazzinata.

Posta una carica Q_1 nel guscio interno di raggio R_1 , per il teorema di Gauss, tra i due gusci il campo elettrico è dato da:

$$\varepsilon_0 \Phi_E = Q_{tot} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{con} \quad \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint d\vec{A} = E(4\pi r^2)$$

Dalla definizione di ddp si ha:

$$\text{ddp} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)$$

Da cui risolvendo rispetto a Q :

$$\text{ddp} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \rightarrow Q = V_0 \cdot 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$Q = 1.14 \times 10^{-5} \text{ C}$$

La capacità è definita come:

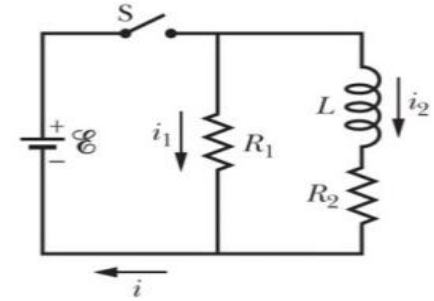
$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 1.75 \times 10^{-10} \text{ F}$$

L'energia immagazzinata è:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = 0.37 \text{ J}$$

Nel circuito in figura ($\varepsilon=12\text{ V}$, $R_1=5\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$, $L=6\text{ H}$) è stato appena chiuso l'interruttore S, calcolare:

2. le correnti i_1 e i_2 , e la corrente i_s che scorre attraverso l'interruttore,
3. i potenziali V_2 ai capi di R_2 , e V_L ai capi di L .



Appena l'interruttore è stato chiuso, la corrente su R_1 è semplicemente:

$$i_1 = \frac{E}{R_1} = 2.4\text{ A}$$

Questo perchè sul ramo contenente l'induttanza:

$$i_2(t) = \frac{E}{R_2} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$$

$$i_2(0) = 0 \Rightarrow i_s = i_1 + i_2 = i_1$$

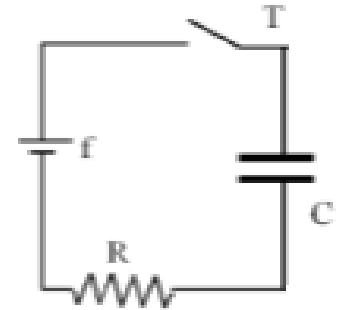
$$V_2 = i_2 R_2 = 0$$

$$V_L = -\varepsilon$$

Nel circuito in figura, $f=1.2 \text{ kV}$, $R=5.6 \text{ k}\Omega$. Il condensatore piano, riempito di dielettrico con $\epsilon_r=16$, ha rapporto superficie/spessore $A/d=15 \text{ m}$. All'istante iniziale $t=0$ viene chiuso l'interruttore.

4. Calcolare la variazione dell'energia in C se viene rimosso il dielettrico

5. Al tempo $2 \times 10^{-5} \text{ s}$, calcolare la caduta di potenziale ai capi della resistenza.



La capacità del condensatore senza dielettrico è data da:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 1.33 \times 10^{-10} \text{ F}$$

Con il dielettrico:

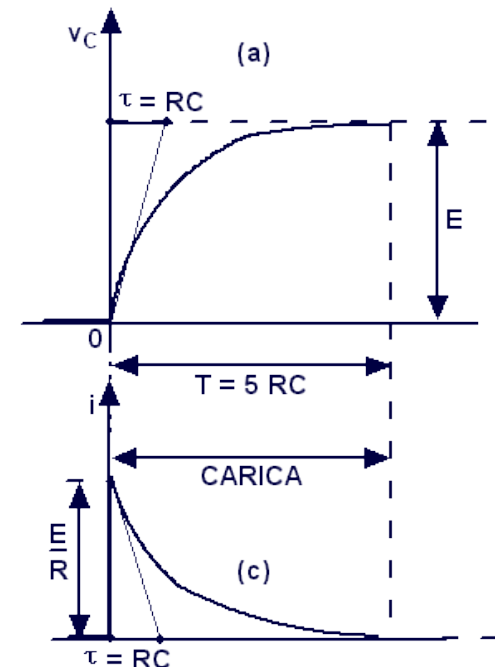
$$C_d = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = 2.12 \times 10^{-9} \text{ F}$$

L'energia al tempo $t=0$ è nulla in quanto $V_C(t=0)=0$

$$\Delta U = \frac{1}{2} C_d V^2 - \frac{1}{2} C V^2 = 0$$

All'istante $t=0$ inizia il processo di carica del condensatore, la V_C aumenta mentre V_R diminuisce al variare del tempo. In particolare:

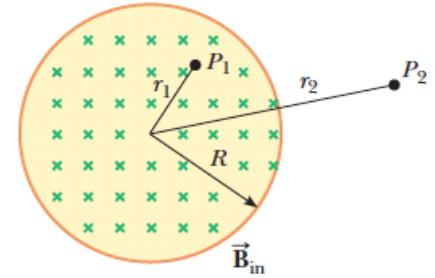
$$V_R = \epsilon \cdot e^{-\frac{t}{RC_d}} = 223 \text{ V}$$



Attraverso il disco in figura ($R=2.5\text{ cm}$) fluisce un campo magnetico variabile $B=140 + 0.03 t^2$. Calcolare:

6. il vettore campo elettrico nel punto P a $r_1=0.02\text{ m}$ dal centro all'istante $t=3\text{ s}$.

7. il campo magnetico indotto in P da un campo elettrico che fluisce nel disco con la stessa legge di variazione temporale.



Dalla legge dell'induzione di Faraday, un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico:

$$\oint E \cdot ds = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$E(2\pi r_1) = \left(\pi R^2\right) \frac{dB}{dt} \rightarrow \frac{dB}{dt} = 0.06t$$

$$\rightarrow E = \frac{\pi R^2}{2\pi r_1} \frac{dB}{dt} = 2.81 \text{ mV/m}$$

Dalla legge di Ampere, invece, abbiamo che un campo elettrico variabile nel tempo genera un campo magnetico

$$\oint B \cdot ds = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \rightarrow B(2\pi r_1) = \mu_0 \epsilon_0 \left(\pi R^2\right) \frac{dE}{dt} \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0.06t$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 \epsilon_0 \pi R^2}{2\pi r_1} \frac{dE}{dt} = 3.13 \times 10^{-20} T$$

Una lampadina da 700 W irradia onde elettromagnetiche in modo isotropo e uniforme.

8. Scrivere il vettore di Poynting e calcolare l'intensità della radiazione su una superficie posta a 5 m dalla sorgente e colpita ortogonalmente dalla radiazione.

9. Calcolare l'ampiezza del campo elettrico e del campo magnetico.

Il vettore di Poynting è definito come:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

L'intensità della radiazione può essere determinata come:

$$I = \frac{\text{Potenza}}{\text{Superficie}} = \frac{P_r}{4\pi r^2}$$
$$I = \frac{700\text{W}}{4\pi (5\text{m})^2} = 2.23 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

L'ampiezza di campo elettrico è legata all'intensità dell'onda come:

$$I = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} \rightarrow E_m = \sqrt{2\mu_0 c \cdot I} = 40.9 \text{ V/m}$$

Mentre l'ampiezza di campo magnetico:

$$\frac{E_m}{B_m} = c \Rightarrow B_m = \frac{E_m}{c} = 1.37 \times 10^{-7} \text{ T}$$

Dato un circuito RLC in serie con $R=10\ \Omega$, $L=100\text{ mH}$, $C=20\ \mu\text{F}$, $\varepsilon_m=34\text{ V}$

10. calcolare la frequenza di risonanza ω_R , e alla frequenza $\omega = 0.9\ \omega_R$, l'impedenza, la fase tra corrente e f.e.m., e la potenza media;

11. dire di quanto deve cambiare la capacità per aumentare la frequenza risonante del 10%, e come cambia in questo caso la potenza.

Frequenza di risonanza

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 707\text{ rad/s}$$

Impedenza

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 18\Omega \rightarrow \begin{cases} X_L = 0.9\omega_r \cdot L \\ X_C = \frac{1}{0.9\omega_r \cdot C} \end{cases}$$

Fase tra corrente e fem

$$\phi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = -0.98\text{ rad}$$

Potenza media

$$P_m = \frac{\varepsilon_{qm}^2}{Z} \cos \phi = 17.9\text{ W} \rightarrow \varepsilon_{qm} = \frac{fem}{\sqrt{2}}$$

Dato un circuito RLC in serie con $R=10\ \Omega$, $L=100\text{ mH}$, $C=20\ \mu\text{F}$, $\varepsilon_m=34\text{ V}$

10. calcolare la frequenza di risonanza ω_R , e alla frequenza $\omega = 0.9\ \omega_R$, l'impedenza, la fase tra corrente e f.e.m., e la potenza media;

11. dire di quanto deve cambiare la capacità per aumentare la frequenza risonante del 10%, e come cambia in questo caso la potenza.

Frequenza di risonanza

$$\omega_{10\%} = 1.1\omega_r \rightarrow C_{10\%} = C \frac{\omega_r^2}{(1.1\omega_r)^2} = 1.65 \times 10^{-5}\text{ F}$$

Quindi la reattanza capacitiva

$$X_C = \frac{1}{\omega_{10\%} \cdot C_{10\%}} = 77.8\ \Omega$$

Da cui l'impedenza

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_{C_{10\%}})^2} = 17.3\ \Omega$$

Fase tra corrente e fem

$$\phi = \arctan\left(\frac{X_L - X_{C_{10\%}}}{R}\right) = -0.95\text{ rad}$$

Potenza media

$$P_m = \frac{\varepsilon_{qm}^2}{Z} \cos \phi = 19.3\text{ W}$$