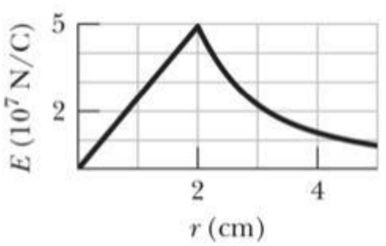
Soluzione esercizio 1

a) $Q = \sigma A = \sigma(4\pi R^2) = 9{,}1 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}\ 4\,\pi\ 4\ m^2 = 4{,}5 \cdot 10^{-4}$ C

b) Dal teorema di Gauss:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4{,}5 \cdot 10^{-4}\ C}{8{,}9 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} = 5 \cdot 10^7\ \frac{Nm^2}{C}$$

Soluzione esercizio 2

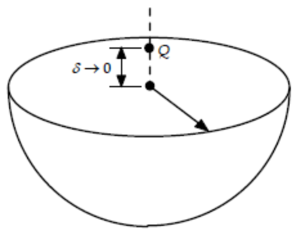


Per $r = 0.02\ m \quad \Rightarrow \quad E = 5 \cdot 10^7\ \frac{N}{C}$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \Rightarrow \quad Q = E 4\pi\varepsilon_0 r^2$$

$$Q = E 4\pi\varepsilon_0 r^2 = \left(5 \cdot 10^7\ \frac{N}{C}\right) 4\,\pi \left(8{,}9\ \cdot\ 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}\right) (4 \cdot 10^{-4} m^2) = 2{,}2 \cdot 10^{-6} C$$

Soluzione esercizio 3



In prossimità del centro della calotta sferica ($\delta \to 0$), tutti i punti sulla semisfera si trovano praticamente alla distanza R dalla carica.
Il campo su ogni punto della superficie curva vale quindi $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ ed è diretto radialmente verso l'esterno.

a) Il flusso attraverso la superficie semisferica è uguale all'intensità del campo per l'area della superficie della semisfera:

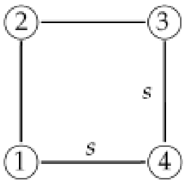
$$\Phi_{curva} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\frac{1}{2}(4\pi R^2) = \frac{Q}{2\varepsilon_0}$$

b) La superficie chiusa racchiude una carica nulla, quindi dal teorema di Gauss:

$$\Phi_{curva} + \Phi_{piana} = 0$$

$$\Phi_{piana} = -\Phi_{curva} = -\frac{Q}{2\varepsilon_0}$$

<u>Soluzione esercizio 4</u>



Il lavoro necessario è uguale alla somma delle energie potenziali delle quattro cariche:

$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$

Non occorre nessuna energia per posizionare la carica q_1 in una data posizione dello spazio vuoto, quindi:

$U_1 = 0$

Quando q_2 è trasportata dall'infinito e posta nelle vicinanze di q_1, l'energia potenziale del sistema sarà:

$U_2 = q_2 V_1$ dove V_1 indica il potenziale nella posizione di q_2 dovuto alla caricaq_1.

Quando q_3 è aggiunta al sistema, essa interagisce con le altre due cariche, si ha dunque:

$U_3 = q_3 V_1 + q_3 V_2$

Infine quando si aggiunge la quarta carica q_4, essa interagisce con le altre tre:

$U_4 = q_4 V_1 + q_4 V_2 + q_4 V_3$

Quindi l'espressione completa per l'energia è:

$$U = 0 + q_2 V_1 + q_3 V_1 + q_3 V_2 + q_4 V_1 + q_4 V_2 + q_4 V_3$$

$$U = q_2 K \frac{q_1}{r_{12}} + q_3 K \frac{q_1}{r_{13}} + q_3 K \frac{q_2}{r_{23}} + q_4 K \frac{q_1}{r_{14}} + q_4 K \frac{q_2}{r_{24}} + q_4 K \frac{q_3}{r_{34}}$$

$$U = k\frac{Q^2}{s} + k\frac{Q^2}{s\sqrt{2}} + k\frac{Q^2}{s} + k\frac{Q^2}{s} + k\frac{Q^2}{s\sqrt{2}} + k\frac{Q^2}{s}$$

$$U = k\frac{Q^2}{s}\left(4 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$U = 5.41\, k\frac{Q^2}{s}$$

Soluzione esercizio 5

Le componenti del campo lungo gli assi x, y, z sono date da:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -5 + 6xy$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2 - 2z^2$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -4yz$$

Nel punto $P \equiv (1, 0, -2)$ avremo dunque:

$$E_x = -5 + 6(1)(0) = -5 \ \frac{N}{C}$$

$$E_y = 3(1)^2 - 2(-2)^2 = -5 \ \frac{N}{C}$$

$$E_z = -4(0)(-2) = 0 \ \frac{N}{C}$$

Il modulo del campo in P è quindi:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = 7{,}07 \ \frac{N}{C}$$