Soluzione esercizio 1

I potenziali delle due sfere sono;

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{R_2}$$

da cui si ricava:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Il rapporto tra le densita' di carica superficiale delle due sfere e':

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1/4\pi R_1^2}{q_2/4\pi R_2^2} = \frac{q_1 R_2^2}{q_2 R_1^2}$$

quindi:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{15m}{5m} = 3$$

Soluzione esercizio 2

Le linee di forza entrano nelle cariche negative cosicche', se il campo elettrico terrestre e' diretto verso il basso, la densita' superficiale di carica σ deve essere negativa.

$$\sigma = \epsilon_0 E = (8.85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2)(-150N/C) = -1.33 \times 10^{-9} C/m^2$$

La carica totale accumulata sulla terra q e' pari alla densita' di carica superficiale moltiplicata per $4\pi R^2$, l'area della superficie della Terra.

$$q = \sigma 4\pi R^2 = (-1.33 \times 10^{-9} C/m^2)(4\pi)(6.37 \times 10^6 m)^2 = -6.8 \times 10^5 C = -680kC$$

La sua capacita' e':

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = (4\pi)(8.85 \times 10^{-12} F/m)(6.37 \times 10^6 m) = 7.1 \times 10^{-4} F = 710\mu F$$

Soluzione esercizio 3

a) Capacita' di un condensatore:

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = 8.859 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \frac{42 \times 10^{-4} m^2}{1.3\,10^{-3} m} = 2.86\,10^{-11} F = 28.6\ pF$$

b) Sappiamo che:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Quindi : $Q = C\,\Delta V = 2.86 \times 10^{-11} F \times 625 V = 1.79\,10^{-8} C = 17.9\,nC$

c)

$$U=\frac{q^2}{2C}=\frac{1}{2}CV^2=\frac{(1.79\times10^{-8})^2C^2}{2\times2.86\times10^{-11}F}=5.60\,10^{-6}J$$

d)

$$\Delta V=E\,d$$

Quindi: $$E=\frac{\Delta V}{d}=\frac{625\,V}{1.3\times10^{-3}m}=4.8\times10^5\frac{V}{m}$$

e) Densita' di energia:

$$u=\frac{U}{A\,d}=\frac{5.6\times10^{-6}J}{42\times10^{-4}m^2\times1.3\times10^{-3}m}=1.03\frac{J}{m^3}$$

o anche:

$$u=\frac{1}{2}\epsilon_0E^2=\frac{1}{2}8.859\,10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}(4.8\,10^5)^2\frac{V^2}{m^2}=1.03\frac{J}{m^3}$$

Soluzione esercizio 4

Si applica il teorema di Gauss ad una sfera concentrica con quelle del condensatore ed avente raggio R1 < r < R2. Le linee di forza hanno un andamento radiale e quindi**:**

$$\Phi_E=E(r)4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0};\qquad E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

La differenza di potenziale tra le due sfere è:

$$V_1-V_2=\int_{R_1}^{R_2}E\cdot dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_2R_1}$$

ricordando che $C=Q/\Delta V$ si ricava:

$$C=4\pi\epsilon_0\frac{R_2R_1}{R_2-R_1}=0.11\times10^{-9}C^2/Nm^2\frac{(10.2\cdot9)10^{-6}m^2}{(10.2-9)10^{-3}m}=8.4\times10^{-12}pF$$