

# Fenomeno di Gibbs

Supponiamo di approssimare una funzione  $f(x)$  tramite un integrale di Fourier troncato a piccole lunghezze d'onda:

$$\hat{f}_\Lambda(x) = \int \hat{f}_k \theta(\Lambda - |k|) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} \quad (1)$$

dove  $\theta$  è la funzione di Heaviside:  $\theta(x) = 1$  se  $x > 0$ ,  $\theta(x) = 0$  altrimenti.

Sappiamo che se  $f \in \mathcal{S}'$ ,  $f_\Lambda \rightarrow f$  nel senso delle distribuzioni, ed  $f_k$  è la trasformata di Fourier di  $f$ :

$$f_k = \mathcal{F}_k[f] = \int f(x) e^{-ikx} dx \quad (2)$$

Questo significa che nei punti in cui  $f$  è continua, si avrà convergenza semplice di  $f_\Lambda(x)$  a  $f(x)$ . Questa convergenza non è però uniforme nei pressi dei punti di discontinuità di  $f$ : nell'intorno dei punti di discontinuità di  $f$ , rimangono intervalli, la cui larghezza va a zero per  $\Lambda \rightarrow \infty$ , ma in cui la differenza  $f(x) - f_\Lambda(x)$  rimane finita  $\forall \Lambda$ .

Ci si riferisce a questa situazione con il nome di Fenomeno di Gibbs. Studiamo il fenomeno di Gibbs nel caso delle discontinuità a  $\pm 1$  della funzione "cappello a cilindro"  $f(x) = \theta(1 - |x|)$ . Per far ciò, scriviamo il lato destro della (1), che è l'antitrasformata di Fourier di un prodotto, come la convoluzione delle antitrasformate. Abbiamo per definizione:  $\mathcal{F}_x^{-1}(\hat{f}) = f(x) = \theta(1 - |x|)$ , mentre, in analogia con la (2):

$$\mathcal{F}_x^{-1}(\theta) = \int \theta(\Lambda - |k|) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} = \frac{\sin \Lambda x}{\pi x}.$$

Pertanto, sostituendo nella (1):

$$\hat{f}_\Lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\sin \Lambda(x-y)}{(x-y)} \theta(1 - |y|) dy$$

e cambiando variabili,  $\Lambda(x-y) = z$ :

$$f_\Lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Lambda(x-1)}^{\Lambda(x+1)} \frac{\sin z}{z} dz. \quad (3)$$

Per esaminare cosa succede nei pressi del punto di discontinuità  $x = 1$ , dove  $f(x^-) = 1$  e  $f(x^+) = 0$ , mandiamo  $\Lambda \rightarrow \infty$  con  $\Lambda(x-1) = \delta = \text{costante}$ . Dalla Eq. (3), otteniamo quindi il risultato

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} f_\Lambda(x(\Lambda)) = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\infty \frac{\sin z}{z} dz,$$

dove  $x(\Lambda) = 1 + \delta/\Lambda \rightarrow 1$  per  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Utilizzando di nuovo la (1), possiamo definire la differenza tra il limite per  $\Lambda \rightarrow \infty$  della funzione troncata e la funzione esatta nel punto mobile  $x(\Lambda)$ :

$$g(\delta) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [f(x(\Lambda)) - f_\Lambda(x(\Lambda))] = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin z}{z} dz \quad (4)$$

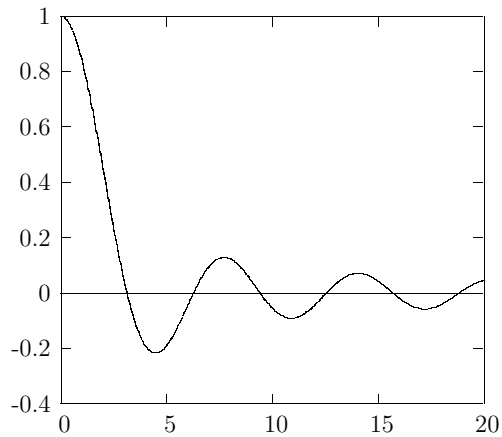


Figura 1: Grafico della funzione  $x^{-1} \sin x$ .

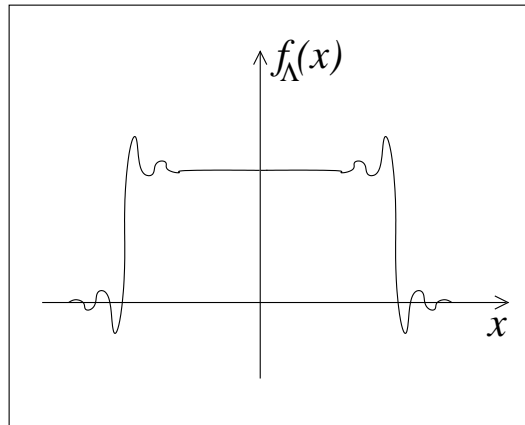


Figura 2: Uno schizzo della funzione  $f_{\Lambda}(x)$ .

Il grafico della funzione  $z^{-1} \sin z$  è rappresentato in Fig 1. È comunque chiaro che la funzione integrale  $g(\delta)$  parte da zero a  $\delta = 0$  e raggiunge il limite  $g(\infty) = \pi$  attraverso una serie di oscillazioni di ampiezza indipendente da  $\Lambda$ . Per  $\Lambda \rightarrow \infty$  queste oscillazioni non scompaiono ma sono schiacciate in uno straterello di larghezza  $\sim 1/\Lambda$  attorno a  $x = 1$ . Il massimo di  $g(\delta)$  è al primo zero della funzione integranda  $\delta = \pi$ , che ci dice che il fenomeno di Gibbs è massimo nei punti  $x = 1 \pm \pi/\Lambda$ . Dalla (4), si vede che l'errore corrisponde a una sovrastima di  $f(x) = 1$  a  $x = 1^-$ , e una sottostima di  $f(x) = 0$  a  $x = 1^+$  (vedi Fig. 2).