Comportamento dell'approssimazione WKB nel piano complesso

Vogliamo risolvere l'equazione $\epsilon y'' = Q(x)y$ nei pressi di un punto di inversione $Q(x_0) = 0$. Supponiamo il punto di inversione sia posto in $x_0 = 0$ con $Q'(0) > 0$; $y(x)$ avrà pertanto andamento oscillante per $x < 0$ e una sovrapposizione di esponenziali di argomento reale per $x > 0$. Identifichiamo con L la scala al di sotto della quale l'approssimazione lineare per $Q(x)$ è applicabile: $Q(x) \simeq Q'(0)x$, $|x| \ll L$. L'approssimazione WKB richiede invece che la scala di variazione della soluzione $y(x)$ sia molto più corta della scala di variazione del coefficiente $Q(x)$, cioè $L\sqrt{|Q(x)/\epsilon|} \gg 1$. Nella regione lineare per $Q(x)$, questo richiederebbe $L\sqrt{|Q'(0)x/\epsilon|} \gg 1$, cioè $|x| \gg \epsilon L^2/|Q'(0)|$. Vediamo quindi che, per ϵ sufficientemente piccolo, esiste un intervallo

$$\epsilon L^2/|Q'(0)| \ll |x| \ll L \tag{1}$$

in cui l'approssimazione lineare per $Q(x)$ è applicabile e allo stesso tempo $y(x)$ può essere determinata con il metodo WKB.

Per $|x| \ll \epsilon L^2/|Q'(0)|$, l'approssimazione WKB cessa di essere applicabile ed è necessario risolvere l'equazione linearizzata

$$\epsilon y'' = Q'(0)xy \tag{2}$$

in modo esatto. La (2), detta equazione di Airy, può essere risolta in termini di funzioni speciali dette per l'appunto funzioni di Airy. Il matching fra le soluzioni WKB oscillante a $x < 0$ ed esponenziale a $x > 0$ richiede quindi una connessione intermedia con la soluzione esatta in termini di funzioni di Airy nella regione $|x| < \epsilon L^2/|Q'(0)|$.

A cosa serve il matching fra soluzioni a destra e a sinistra del punto di inversione? Ecco un esempio: supponiamo che $Q(x)$ non cambi segno per $x > 0$. La condizione al contorno naturale per il problema è quindi $y(\infty) = 0$, corrispondente a una soluzione smorzata ad $x > 0$. I coefficienti dell'onda progressiva e regressiva nella soluzione WKB a sinistra:

$$y(x) = |Q(x)|^{-1/4}[A_p \exp(\mathrm{i}\int^x \sqrt{|Q(x')/\epsilon|}\mathrm{d}x') + A_r \exp(-\mathrm{i}\int^x \sqrt{|Q(x')/\epsilon|}\mathrm{d}x')] \tag{3}$$

dipendono però dalla condizione al contorno a destra, e possono essere determinati solo effettuando il matching tra le soluzioni a destra e a sinistra del punto di inversione.

Un approccio alternativo alla risoluzione esatta del problema vicino a $x = 0$ consiste nel passare da $x > 0$ a $x < 0$ aggirando il punto $x = 0$ nella regione di piano complesso $\epsilon L^2/|Q'(0)| \ll |z| \ll L$. Questo richiede però tenere conto della non uniformita rispetto ad $\arg z$ dell'approssimazione WKB. Questa non uniformità discende dal fatto che l'approssimazione WKB corrisponde agli ordini più bassi di una serie asintotica divergente in ϵ. La divergenza origina dalla singolarità essenziale in $\epsilon = 0$ della soluzione $y = y(x, \epsilon)$. In maniera alternativa, può essere vista vista, per ϵ fissato, come l'effetto della singolarità

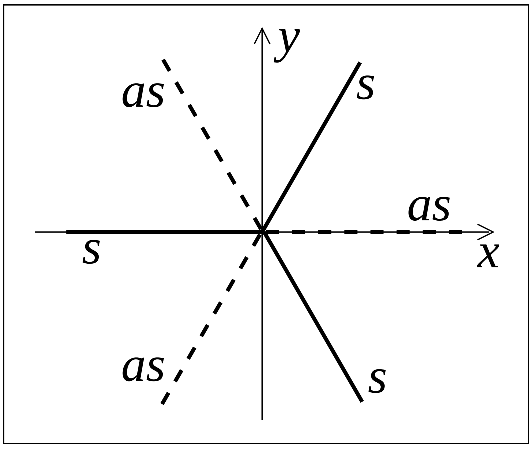

Figura 1: Comportamento nel piano complesso dell'approssimazione WKB alla soluzione della Eq. (2). Linee spesse continue e tratteggiate individuano rispettivamente linee di Stokes (s) e anti-Stokes (as).

essenziale nel punto $x = \infty$ della soluzione (3) (e controparte smorzata) alla (2). [Il punto all'infinito corrisponde a una singolarità irregolare della equazione di Airy (2)].

La determinazione di approssimazioni asintotiche uniformemente valide nel piano complesso è l'argomento di una tecnica detta degli integrali di fase. L'approccio mostra l'importanza dei fenomeni di Stokes nel comportamento delle serie asintotiche nel piano complesso. Ricordo che attraversando una linea di Stokes si ha lo scambio di ruolo tra un contributo dominante e uno sottodominante nella serie asintotica, mentre lungo le linee di anti-Stokes la differenza tra comportamento dominante e sotto-dominante è massimo. La soluzione WKB alla (2) nel piano complesso è nella forma

$$y(z) = z^{-1/4}[A_+ \exp(cz^{3/2}) + A_- \exp(-cz^{3/2})] \tag{4}$$

dove $c = \frac{2}{3\epsilon}\sqrt{Q'(0)}$. Vediamo che le linee di Stokes e anti-Stokes sono individuate rispettivamente da $Re(z^{3/2}) = 0$ e $Im(z^{3/2}) = 0$, cioè $\arg z = \pm\pi/3, \pi$ e $\arg z = 0, \pm 2\pi/3$ (vedere figura).

Analizzando la (4), vediamo che la soluzione WKB ha un taglio, prodotto dal fattore $z^{-1/4}$, che non ha corrispettivo nella soluzione esatta, analitica in tutto il piano complesso. [L'unica singolarità nella Eq. (2) è la singolarità all'infinito].

Una approssimazione asintotica uniformemente valida in C può essere ottenuta introducendo una dipendenza da $\arg z$ nei coefficienti della (4), in modo tale che questa diventi continua (a meno di termini sottodominanti) rispetto a $\arg z$. Il taglio nel piano complesso cessa a questo punto di essere necessario.

La procedura è la seguente. Riscriviamo la (4), lontano dalle linee di Stokes, nella forma

$$y(z) = z^{-1/4}[A_d(\phi) \exp(cz^{3/2}) + A_s(\phi) \exp(-cz^{3/2})] \tag{5}$$

dove $\phi = \arg z$ e i pedici in $A_{d,s}$ si riferiscono al fatto che l'esponenziale a moltiplicare è smorzato o divergente. Le soluzioni lungo le linee di Stokes, sono ottenute per continuità dalla (5), ma la scrittura $A_{d,s}$ non indentificherà più, ovviamente, soluzioni smorzate o divergenti.

Per fissare le idee continuiamo a considerare il caso di una soluzione puramente smorzata per $x > 0$. Nella notazione della Eq. (5), pertanto: $A_d(0) = 0$, $A_s(0) \equiv A \neq 0$. Per determinare la soluzione oscillante a $x < 0$, aggiriamo l'origine passando prima dal semipiano superiore ($\phi \to \pi$) e poi da quello inferiore ($\phi \to -\pi$). Attraversando la linea di Stokes a $\phi = \pm\pi/3$, le soluzioni dominanti e sottodominanti si scambiano, e avremo quindi per $\pi/3 < |\phi| < \pi$ $A_s(\phi) = A_d(0) = 0$, $A_d(\phi) = A_s(0) = A$. Arrivati a $\phi = 0$, la soluzione WKB sarà, a seconda che ci si arrivi da sopra o da sotto:

$$y_\pm(x) = A\exp(\mp \mathrm{i}\pi/4)|x|^{-1/4}\exp(\pm \mathrm{i}c|x|^{3/2}), \quad x < 0, \tag{6}$$

dove l'assenza del secondo esponenziale $\exp(\mp \mathrm{i}c|x|^{3/2})$ è dovuta al fatto che A_s per $\pi/3 < |\phi| < \pi$ è nullo. Per imporre continuità, possiamo sfruttare il fatto che soluzioni WKB che differiscono per termini sottodominanti sono ugualmente asintotiche alla soluzione esatta. Siamo quindi liberi di sostituire nella regione $\pi/3 < \phi < \pi$ il coefficiente (nullo) $A_s = 0$ con $A_s = S$, dove S è una costante arbitraria. Analogamente, per $-\pi < \phi < -\pi/3$ poniamo, richiedendo $y(z^*) = y^*(z)$: $A_s = S^*$. L'errore risulterà minimo se la sostituzione è effettuata lungo le linee di anti-Stokes a $\phi = \pm 2\pi/3$.

Possiamo sfruttare la libertà nella scelta della costante S per imporre assenza di tagli, e quindi continuità della soluzione WKB per $\phi = \pi$. Sostituendo nella Eq. (6), troviamo

$$\begin{cases} y_+(x) &= \exp(-\mathrm{i}\pi/4)|x|^{-1/4}[A\exp(\mathrm{i}c|x|^{3/2}) + S\exp(-\mathrm{i}c|x|^{3/2})] \\ y_-(x) &= \exp(\mathrm{i}\pi/4)|x|^{-1/4}[A\exp(-\mathrm{i}c|x|^{3/2}) + S^*\exp(\mathrm{i}c|x|^{3/2})]. \end{cases}$$

Imponendo continuità $y_+(x) = y_-(x)$, troviamo $S = \mathrm{i}\,A$ e la soluzione a x negativi diventa pertanto:

$$y(x) = 2A\cos(c|x|^{3/2} - \pi/4),$$

corrispondente a uno sfasamento di $\pi/2$ tra onda incidente e riflessa.