1 Richiami su calcolo integrale e serie di funzioni

Esercizio 1 Si consideri la successione di funzioni

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \cos nx) & \text{se } 0 \le x < \pi/n \\ 1 & \text{se } x \ge \pi/n \end{cases}$$

e la successione delle sue derivate $f_n(x) = F_n'(x)$.

- Trovare le funzioni F ed f a cui convergono puntualmente le due successioni. Verificare se si ha convergenza uniforme nei due casi.
- Dire se si ha convergenza L^2 nei due casi.
- Fissato un n, calcolare la trasformata di Fourier di $f_n(x)$ e studiarne il comportamento nel piano complesso.
- A cosa tende puntualmente la successione delle trasformate di Fourier?

Esercizio 2 La serie di potenze $\sum a_n z^n$ ha raggio di convergenza R. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie:

$$\sum a_n^k z^n, \quad \sum a_n z^{kn}, \quad \sum a_n z^{n^2}, \quad \sum (a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k) z^n$$

dove k è un intero positivo, e gli a_n nella ultima serie sono positivi.

Esercizio 3 Dimostrare che se $u_n(x)$ converge uniformemente a $u(x)$ e $g(x)$ è limitata, allora $u_n(x)g(x)$ converge uniformemente a $u(x)g(x)$. Dare un controesempio di non convergenza uniforme nel caso in cui $g(x)$ non sia limitata.

Esercizio 4 Vedere gli esercizi alle pagine 63-64 del libro Analisi 3 di Gilardi.

2 Teoria delle distribuzioni

Esercizio 1 Risolvere l'equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \delta(t), \tag{1}$$

direttamente e poi attraverso calcolo della trasformata di Fourier della equazione ed anti-trasformata della soluzione in spazio di Fourier y_ω.
Scrivere la distribuzione u determinata dalla equazione $(1 - x^2)u = 1$ in termini di pv e delte di Dirac e mostrare come le costanti arbitrarie nella soluzione diretta della (1) corrispondono alle costanti arbitrarie nella u.
Quando è possibile scrivere la componente associata alle delta della distribuzione u, nella forma $a\delta(x^2 - 1)$? Determinare la normalizzazione a in funzione delle costanti in u.

Esercizio 2 Sia U la distribuzione associata alla funzione $u(x)$. Indicato con $\hat{P}$: $\hat{P}f(x) = f(-x)$ l'operatore di parità, diremo che la distribuzione u è pari o dispari a seconda se $U[Pf] = \pm U[f]$.
Se la funzione $u(x)$ è pari, è pari anche la U? Mostrare che se U è pari, la distribuzione associata a u' è dispari.
Mostrare che $u(x) = \delta(x)$ è pari e $\delta'(x)$ è dispari. Ripetere l'esercizio con $u(x) = \mathrm{pv}\frac{1}{x}$.
Indichiamo con $u^{(-n)}$ la primitiva di ordine n della u. Se $u(x) = \delta(x)$, qual'è il valore n_{min} di n per cui $u^{(-n)}$ è continua? Determinare esplicitamente $u^{(-n)}$ scegliendo le costanti in modo tale che la distribuzione sia pari.

Esercizio 3 Studiare la convoluzione $\theta * g$ con $g(x) = \theta(1/2 - |x|)$ e $g(x) = 2\theta(1/2 - |x|)\mathrm{sign}(x)$, determinandone il grafico fornendo una interpretazione geometrica della operazione di convoluzione nei due casi. La funzione $\theta * g$ è derivabile? Cosa succede se in luogo della discontinuità della θ, si considera una singolarità integrabile (per esempio $\mathrm{sign}(x)|x|^{-1/2}$)? Cosa se ne può dedurre circa le proprietà di derivabilità di una generica convoluzione?

Esercizio 4 La successione $u_n(x) = \theta(x)n\mathrm{e}^{-nx}$ tende alla delta di Dirac? C'è qualche valore di α per cui la successione $v_n(x) = \theta(x)n^\alpha x\mathrm{e}^{-nx}$ tende alla delta di Dirac? In genere a cosa tenderà?
Cosa succede se sostituisco $|nx|^\alpha$ a nx in $u_n(x)$? Che relazione c'è con la $\delta(|x|^\alpha)$?

Esercizio 5 Mostrare che, a partire da limiti di diverse successioni di funzioni integrabili che approssimano puntualmente $1/x$, si possono ottenere distribuzioni $\mathrm{pv}1/x + c\delta(x)$ con c arbitrario.

Esercizio 6 Vedere esercizi 3 e 5 Pag 107, 1 e 3 pag 118, 1 pag. 128, 1 e 5 pag. 132, 10.11 pag 143, tutti nel libro Analisi 3 di Gilardi.

3 La trasformata di Fourier

Esercizio 1 Stimare l'intensità del fenomeno di Gibbs nel ricostruire tramite antitrasformata la funzione $\mathrm{sign}(x)\exp(-|x|)$.

Esercizio 2 Si calcoli l'antitrasformata della funzione $\hat{u}_k = (1 - \mathrm{i}k)^{-1}(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k})$. Cosa succede nel punto $x = -1$? È possibile il calcolo in questo caso utilizzando le tecniche dell'analisi complessa? Cosa ci si aspetta (senza fare il conto) nel punto $x = 2$? Commentare il risultato a partire dal fatto che $\hat{u}$ non era in L^1.

Esercizio 3 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(t) = 1/(1+x^2)$. Sia $f_\Lambda(t)$ l'approssimazione a $f(t)$ ottenuta trascurando i modi di Fourier con $|k| > \Lambda$. Determinare Λ in modo che $||f - f_\Lambda||_2 < 10^{-2}$, dove $||.||_2$ indica la norma L^2. Fissato Λ esprimere la relazione fra f e f_Λ tramite una operazione di convoluzione. Quali proprietà ci si può aspettare per la funzione f_Λ in rapporto alla f?

Esercizio 4 Se $\hat{f}$ è la trasformata di Fourier della funzione reale f, di cosa saranno trasformate, separatamente, le parti reale e immaginaria di $\hat{f}$?

Esercizio 5 Sia $f \in L^1 \cup L^2$ e si ponga $f_\epsilon = f * u_\epsilon$, dove $u_\epsilon(x) = (\pi\epsilon)^{-1/2}\exp(-x^2/\epsilon)$ è l'approssimazione tramite Gaussiana della delta di Dirac. Calcolare $\hat{u}_{\epsilon,k}$ e confrontarne l'andamento con quello di $u_\epsilon(x)$. Verificare se per $\epsilon \to 0$ $\hat{f}_\epsilon$ tende puntualmente a $\hat{f}$. Effettuando il conto esplicitamente, verificare se si ha convergenza puntuale anche per f_ϵ. Se $f(x) = \theta(x)\mathrm{e}^{-x}$, calcolare $f'_\epsilon(x)$; c'è convergenza puntuale?

Esercizio 6 Si indichi con $f_n(t)$ la successione di funzioni uguali a t^n nell'intervallo $[0, 1]$ e zero altrove. Studiare convergenza puntuale e uniforme delle funzioni f_n e $\hat{f}_n$. Si può passare da f_n a f_{n+1} tramite moltiplicazione o tramite calcolo di primitive. Che differenza c'è tra i risultati?

Esercizio 7 Vedere esercizi a pag 256-257 (in particolare il n. 13) del libro Analisi 3 di Gilardi.

4 Richiami di analisi complessa

Esercizio 1 Calcolare la trasformata di Fourier della potenza x^α per α non necessariamente intero. Calcolare la trasformata di Fourier della Gaussiana.

Esercizio 2 Calcolare l'integrale $\int_0^\infty (1+x^3)^{-1} \ln x \mathrm{d}x$.

Esercizio 3 Calcolare le serie $\sum_n (1+n^2)^{-2}$ e $\sum_n (-1)^n (n^2+a^2)^{-1} \cos n\mathbf{a}$.

Esercizio 4 Calcolare lo sviluppo di Mittag-Leffler di $\tan z$ e di $\csc^2 z$

Esercizio 5 In quali regioni di z le seguenti funzioni sono analitiche? $f(z) = \int_0^\infty \omega^z \sin \omega \mathrm{d}\omega$; $g(z) = \int_0^\infty \omega^z \cos \omega \mathrm{d}\omega$; $h(z) = \sum_{n=1}^\infty z^{-n} \sin nz$.

Esercizio 6 Calcolare l'integrale $\int_A f(x) \mathrm{d}x$ dove $f(x) = x^2[((x-2)^2-1)((x-5)^2-1))]^{-1/2}$ e $A = [1,3] \cup [4,6]$.

Esercizio 7 Dimostrare che una funzione la cui sola singolarità è un polo all'infinito è un polinomio.

Esercizio 8 Dimostrare che l'integrale $(2\pi\mathrm{i})^{-1} \int_\Gamma [\alpha(\omega) - \beta]^{-1} \alpha'(\omega) \mathrm{d}\omega$ è uguale alla differenza nel numero di zeri e di poli della funzione $\alpha(\omega) - \beta$, nel dominio circondato dal percorso chiuso Γ

5 Equazioni differenziali importanti in fisica

Esercizio 1 Risolvere l'equazione di avvezione $(\partial_t - \partial_x)\phi(x,t) = 0$ nell'intervallo $0 < x < 1$ e per $0 < t < 1$. Considerare condizioni iniziali $\phi(x,0) = x$ e condizioni al bordo $\phi(0,t) = -t$.

Esercizio 2 Trovare la forma generale della soluzione omogenea alla equazione di D'Alambert nel caso 3D (suggerimento: scrivere la soluzione in forma $\phi = \psi/r^2$ e lavorare in coordinate sferiche.

Esercizio 3 Scrivere tramite separazione delle variabili la soluzione generale della equazione di D'Alambert omogenea nel dominio 1D $0 < x < 1$, in assenza di forze esterne e condizioni al bordo $\phi(0,t) = \phi(1,t) = 0$. Cosa potrebbe rappresentare fisicamente questo sistema?

Esercizio 4 Derivare la soluzione fondamentale della equazione di avvezione-diffusione $[\partial_t - \partial_x - \partial_x^2]\phi = 0$. Di nuovo, cosa potrebbe rappresentare fisicamente questo sistema?

Esercizio 5 Trovare la soluzione fondamentale della equazione di Laplace nella regione di spazio 3D ad x positivi, date condizioni al contorno di Dirichlet (potenziale nullo) e Neumann (campo normale nullo) sul piano $x = 0$.

Esercizio 6 Trovare la risposta di un oscillatore armonico a una forza iniziale $\delta(t)$. Perché questo non è sufficiente a determinare la soluzione fondamentale in modo univoco? (quali altre alternative ci sarebbero?)

Esercizio 7 Si consideri l'equazione $2\partial_x^2 u + \partial_x \partial_t u - \partial_t^2 u = 0$, $x, t \in \mathbf{R}$. È una equazione ellittica, parabolica o iperbolica?
Scrivere la ODE per la trasformata $\hat{u}_k(t)$. Supponendo sin da ora che $\mathrm{d}\hat{u}_k/\mathrm{d}t|_{t=0} = 0$, che condizione se ne ricava per $\hat{u}_k(t)$?
Trovare per $t > 0$ la $\hat{u}_k(t)$ e poi la $u(x,t)$ se $u(x,0) = \delta(x-1)$ e poi per $u(x,0) = 1$.

Esercizio 8 Trovare la soluzione stazionaria della seguente equazione di avvezione-diffusione: $\partial_t \phi + \partial_x(x\phi) - \partial_x^2 \phi = 0$. Dimostrare che l'integrale $\int_{\infty}^{\infty} \phi(x,t)\mathrm{d}x$ è conservato dalla dinamica (che significato fisico ha questo fatto?)
Considerare un rilascio istantaneo ad $x = 0$. Cosa succede nella fase iniziale subito dopo il rilascio? Quanto dura questa fase?
Considerare il sistema forzato in cui $\partial_t \phi + \partial_x(x\phi) - \partial_x^2 \phi = \delta(x)$ Sfruttare il fatto che questa soluzione cresce linearmente nel tempo (perché?) e determinare la forma della soluzione a grandi tempi.

6 Il metodo delle funzioni di Green

Esercizio 1 Calcolare la funzione di Green dell'equazione di D'Alambert smorzata. Come si potrebbe quantificare la dispersione di un pacchetto d'onde rispetto al caso non dissipativo?

Esercizio 2 Trovare la funzione di Green della equazione di D'Alambert in 3D. (Suggerimento: esprimere il Laplaciano in coordinate sferiche, e scrivere la funzione di Green nella forma $G(\mathbf{r}, t) = r^n \chi(r, t)$ per un opportuno valore di n).

Esercizio 3 Si consideri il seguente integrale: $\text{pv} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\omega - \alpha i)(\omega - \nu)]^{-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} \mathrm{d}\omega$, dove $\omega, \alpha, \nu \in \mathbf{R}$. Calcolare l'integrale nel caso $\alpha > 0$. Si chiede se il simbolo di valore principale è superfluo. Lo stesso nel caso $\alpha < 0$.
Si chiede se i risultati ottenuti forniscono delle "relazioni di dispersione" e perché. In caso affermativo, indicare le due funzioni "parte reale" e "parte immaginaria" che risultano da tali relazioni.

Esercizio 4 Una particella in moto in un fluido viscoso sotto l'effetto di una forza, obbedisce l'equazione $\ddot{x} + \Gamma x = f$, dove x indica la coordinata. Si supponga che $f(t) = F$ per $t \in [0, T]$ e sia nulla altrove.
Studiare le proprietà in campo complesso della soluzione trasformata $\hat{x}_\omega$. Esiste l'antitrasformata di Fourier (in qualche senso) della soluzione?
Risolvere l'equazione in spazio fisico per condizioni iniziali $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Spiegare i risultati al punto precedente in base alle proprietà della soluzione.
Ripetere il calcolo utilizzando il metodo delle trasformate di Laplace.

Esercizio 5 La trasformata di Fourier della funzione di Green di un sistema è data da $\hat{G}_\omega = -\mathrm{i}\omega$. Dimostrare che $G(t) \neq L^1$ e $G(t) \neq L^2$, ma che l'output $v(t)$ è facilmente esprimibile in termini dell'input $x(t)$ se quest'ultimo è derivabile. Il sistema è causale?
Considerare i seguenti input non derivabili $x(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ e $x(t) = \theta(T - |t|)$. Lavorando in spazio di Fourier e poi antitrasformando, calcolare la risposta $v(t)$ e discutere il risultato in termini di teoria delle distribuzioni.
La funzione $\hat{G}_\omega$ può essere ottenuta come limite della successione $\hat{G}_{n,\omega} = -\mathrm{i}\omega[1 + (\omega/n)^2]^{-1}$. Calcolare $G_n(t)$ e studiarne l'andamento. Esiste il limite puntuale di $G_n(t)$?

Esercizio 6 Un sistema lineare indipendente dal tempo e con funzione di Green $\in L^2$ ha la proprietà che se l'input è $= \phi(t) = t^{-1} \sin t$, l'output è identicamente nullo. Spiegare come ciò sia possibile, mostrando in particolare come ciò non implica che l'output sia nullo indipendentemente dall'input. Trovare un altro input (non proporzionale a ϕ) che dia di nuovo output nullo e caratterizzare infine il nucleo della funzione di Green.
Dire se la trasformata di Fourier della funzione di Green di un simile sistema può essere olomorfa nel semipiano $Im(\omega) > -\epsilon$ per un qualche $\epsilon > 0$.
Supporre che $G(t) = (\mathrm{i}t + 1)^{-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Dire come bisogna scegliere α in modo che il sistema abbia la proprietà discussa all'inizio.

Esercizio 7 Se a un sistema lineare, causale e indipendente dal tempo si applica l'input $a_0(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$, l'output sarà $b_0(t) = \theta(t)\mathrm{e}^{-t}$. Ci si deve attendere che anche per qualsiasi altro input $a(t)$, l'output sia $b(t) = \theta(t)a(t)$? Un sistema con tali proprietà potrebbe essere causale?
Trovare la $\hat{G}_\omega$ del sistema descritto all'inizio. Trovare da qui la risposta del sistema ai due input: $a(t) = \theta(-t)t\mathrm{e}^t$ e $a(t) = \theta(1 - |t|)$.
Trovare l'equazione differenziale cui soddisfa il sistema e la sua funzione di Green $G(t)$.

7 Serie divergenti e asintotiche

Esercizio 1 Trovare la continuazione analitica per $Re(z) < 0$ della funzione $F(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt^2}\mathrm{d}t$.

Esercizio 2 Sommare con il metodo di Eulero le seguenti serie: $1 + 0 + (-1) + 0 + \ldots$; $1+0+0+(-1)+1+0+0+(-1)+1+0+0\ldots$; $1+(-1)+0+0+1+(-1)+0+0\ldots$; $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n n^2$.

Esercizio 3 Mostrare che $0! - 2! + 4! - 6! + \ldots$ non è Borel-sommabile, ma che $0! + 0 - 2! - 0 + 4! + 0 - 6! + 0 + \ldots$ lo è e calcolarne la somma secondo Borel.

Esercizio 4 Dimostrare che $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n (2n)! x^n$ è asintotica a $I(x) = \int_0^\infty [1 + xt^2]^{-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Esercizio 5 Una soluzione sottodominante alla ODE $x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0$ è $y(x) = x^{-1}\exp(-1/x)$. Cosa succede alla linea di Stokes? C'è un fenomeno di Stokes?

Esercizio 6 Mostrare che se $f(z)$ è analitica per $\alpha < \arg(z) < \beta$ e $\sum_n a_n z^n$ è asintotica in questo settore, allora $\sum_n n a_n z^{n-1}$ è asintotica a $f'(z)$ in questo settore. Suggerimento: usare la formula di Cauchy su un percorso circolare contenuto nel settore e usare l'espansione asintotica di f per approssimare uniformemente $f'(z)$.

Esercizio 7 Considerare una funzione $f(z)$ che soddisfa il criterio del problema precedente e supporre che il settore di validità dello sviluppo asintotico contenga l'asse reale. Considerare ora la funzione $g(z) = f(z) + \exp(-1/z)\sin(\exp(1/z))$. Evidentemente non è più vero che $\sum_n n a_n z^{n-1}$ è asintotica a $g'(z)$. È questo un controesempio all'esercizio precedente?

8 Metodi di approssimazione locali

Esercizio 1 Trovare le radici a ordine zero della equazione $\epsilon^2 x^3 + x^2 + 2x + \epsilon = 0$, e calcolare due ordini successivi in ciascuna radice.

Esercizio 2 Determinare con il metodo iterativo che tipo di espansione perturbativa, inclusi i $\delta_n(\epsilon)$, è quella per l'equazione $(1-\epsilon)x^2 - 2x + 1 = 0$.

Esercizio 3 Trovare i primi termini nella espansione della soluzione a $\mathrm{e}^{-x^2} = \epsilon x$.

Esercizio 4 Trovare un esempio di una relazione asintotica $f(x) \sim g(x)$, $x \to \infty$ che non vale con gli esponenziali (nel senso che l'affermazione $\mathrm{e}^{f(x)} \sim \mathrm{e}^{g(x)}$ $x \to \infty$ è falsa).

Esercizio 5 Trovare il comportamento leading order per $x \to 0^+$ delle seguenti equazioni: $x^4 y''' = y$; $x^4 y''' - 3x^2 y' + 2y = 0$; $y'' = \sqrt{x} y$; $x^6 y'' = \mathrm{e}^x y$; $x^5 y''' - 2xy' + y = 0$; $x^4 y'' - x^2 y' + y/4 = 0$; $y'' = (\cot x)^4 y$.

Esercizio 6 Trovare il comportamento leading order per $x \to \infty$ delle seguenti equazioni: $y'' = xy$ (equazione di Airy); $y'' + y'/x - ((1 + \nu/x)^2) = 0$ (equazione di Bessel modificata); $y'' + (\nu + 1/2 - x^2/4)y = 0$ (equazione parabolica cilindrica). Analizzare eventuali fenomeni di Stokes.

Esercizio 7 Ottenere lo sviluppo asintotico per piccoli x della soluzione della equazione $x^2 y'' + (2x+1)y' - x^2[\mathrm{e}^{2/x} + 1]y = 0$.

Esercizio 8 Trovare le linee di Stokes a $z \to \infty$ per le seguenti ODE $y'' + (1 + 2x^{-1/2})y' + y/4 = 0$; $y'' = z^{1/3} y$; $y''' = -zy$; $y'' = z^8 \mathrm{e}^{1/z} y$; $\mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}z^4 = z^2 y$. (Attenzione a non confondere linee di Stokes con i tagli; le linee di Stokes vanno trovate sui fogli di Riemann appropriati).

Esercizio 9 Mostrare che

$$x + \frac{2}{3}x^3 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)x^5 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)x^7 + \ldots = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Esercizio 10 Determinare i termini successivi nello sviluppo della soluzione inomogenea alla equazione $y'' = xy - 1$. Notare che si tratta di una serie asintotica divergente, senza però coinvolgere fattori divergenti all'infinito tipo e^x.

9 Sviluppo asintotico di integrali

Esercizio 1 Mostrare che il termine successivo nella espansione in potenze di $1/x$ dell'integrale di Laplace $\int f(t)\mathrm{e}^{xf(t)}\mathrm{d}t$, richiede considerare l'espansione di ϕ oltre il secondo grado, accanto a quella di $f(t)$ (supporre il massimo di ϕ all'interno del dominio di integrazione).

Esercizio 2 Mostrare che il metodo di Laplace consiste nell'approssimare il termine $\mathrm{e}^{x\phi(t)}$ in $\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{x\phi(t)}$ con una delta di Dirac nel punto $\bar{t}$ di massimo di ϕ. Supporre inizialmente $a < \bar{t} < b$. Cosa succederebbe se il massimo non fosse quadratico? Derivare una rappresentazione in termini di delta di Dirac nel caso in cui $\phi(t) < \phi(a)$ per $a < t < b$ e $\phi'(a) < 0$. Esprimere l'ordine successivo del metodo di Laplace nel caso $a < \bar{t} < b$ con massimo quadratico in termini di funzioni delta (usare risultato del problema precedente).

Esercizio 3 Trovare i primi termini nello sviluppo asintotico per $x \to \infty$ degli integrali $\int_0^{\pi/2} \exp(-x\tan^2 t)\mathrm{d}t$ (suggerimento: cercare di porre l'integrale in forma adatta al lemma di Watson). Trovare l'ordine dominante per $x \to \infty$ dell'integrale $\int_0^{2\pi}(1+t^2)\mathrm{e}^{x\cos t}\mathrm{d}t$.

Esercizio 4 Trovare l'ordine dominante per $x \to \infty$ di: $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin t}\exp(-x\sin^4 t)\mathrm{d}t$; $\int_0^1\sqrt{t(1-t)}(t+a)^{-x}\mathrm{d}t$, $a > 0$; $\int_0^{\pi/4}\sqrt{\tan t}\mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t$; $\int_0^{\pi^2/2}\mathrm{d}s\int_0^{\pi^2/2}\mathrm{d}t\exp(x\cos\sqrt{s+t})$.

Esercizio 5 Trovare l'ordine dominante per $x \to \infty$ dell'integrale $\int_a^b(t-a)^\alpha g(t)\mathrm{e}^{x\phi(t)}\mathrm{d}t$, $\alpha > -1$, dove $\phi(t)$ è massimo in $t = a$ e $g(a) = 1$: $\alpha > -1$ e $\phi'(a) < 0$. Ripetere l'analisi nel caso in cui $\phi^{(k)}(a) = 0$ per $k < n$. Cosa succede se si prova ad utilizzare il metodo dei massimi mobili?

Esercizio 6 Cosa succede se si usa il metodo di Laplace con massimo mobile in un integrale di Laplace con un massimo interno al dominio di integrazione, ma senza singolarità nel punto di massimo che richiedano l'uso del metodo?

Esercizio 7 Mostrare che applicazione naive del metodo di Laplace con massimi mobili per l'integrale $I(x,\alpha) = \int_0^\infty t^\alpha\mathrm{e}^{xt}\mathrm{d}t$, $x \to \infty$ non funziona; notare che $I(x,\alpha) = x^{-\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)$.

Esercizio 8 Calcolare con il metodo steepest descent l'integrale $\int_0^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt^2}\mathrm{d}t$ per $x \to \infty$.

Esercizio 9 Usare steepest descent per calcolare l'ordine dominante per $x \to \infty$ degli integrali $\int_0^{\pi/4}\cos(xt^2)\tan^2 t\ \mathrm{d}t$ e $\int_0^1\ln(1+t)\exp(\mathrm{i}x\sin^2 t)\mathrm{d}t$.

Esercizio 10 Calcolare lo sviluppo asintotico dei seguenti integrali: $I(x) = \int_0^{\pi/4}\cos(xt^2) \times \tan^2 t\mathrm{d}t$, $x \to \infty$; $K_\nu(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(\nu t - x\cosh t)\mathrm{d}t$, $\nu \to \infty$.

Esercizio 11 Investigare il fenomeno di Stokes per l'integrale $I(z) = \int_0^1\mathrm{e}^{zt^3}\mathrm{d}t$. In altre parole, investigare il comportamento per $|z| \to \infty$ e $\arg z$ fissato e verificare la presenza di linee di Stokes a $|\arg z| = \pi/2$.

10 Matching asintotico

Esercizio 1 Calcolare i seguenti due integrali:

$$\int_0^\infty \frac{rx\mathrm{d}x}{(r^2+x)^{3/2}(1+x)}, \quad r \to 0; \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1-m^2\sin^2\theta)}, \quad m \to 1^-.$$

Esercizio 2 Trovare i rescaling appropriati per $x \to 0$ per l'equazione $\epsilon x^m y' + y = 1$, $0 < x < 1$, $y(0) = 0$.

Esercizio 3 Risolvere l'equazione $\epsilon y'' + x^{1/2}y' + y = 0$ in $0 < x < 1$, con condizioni al contorno $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$.

Esercizio 4 Calcolare le correzioni di ordine ϵ e ϵ^2 per l'equazione $\epsilon y'' + (1+x)y' + y = 0$, $y(0) = y(1) = 1$. Determinare l'ampiezza della regione di transizione a ciascun ordine.

Esercizio 5 Determinare la posizione dello strato limite e trovare la relativa soluzione interna per l'equazione $\epsilon y'' + y'/x + y = 0$, $y(\epsilon) = 0$, $y(1) = \mathrm{e}^{-1/2}$.

Esercizio 6 Risolvere la seguente equazione includendo i due ordini successivi in ϵ: $\epsilon^2 y'''' - y'' = -1$, $-1 < x < 1$ con $y(\pm 1) = y'(\pm) = 0$.

Esercizio 7 Risolvere l'equazione nonlineare $\epsilon y'' + yy' - y = 0$, $0 < x < 1$, con $y(0) = 0$ e $y(1) = 3$. Supporre che vi sia uno strato limite in $x = 0$.
Considerare ora le condizioni al contorno $y(0) = -3/4$, $y(1) = 5/4$. Verificare che lo strato limite si è mosso all'interno del dominio, e che ai suoi estremi la soluzione salta da $y = -M$ a $y = M$. Trovare la soluzione a leading order.

Esercizio 8 Verificare se le seguenti equazioni sono risolvibili e nel caso trovare la soluzione leading order: $\epsilon y'' + y'/x + y = 0$, $y(-1) = 2\mathrm{e}^{-1/2}$ $y(1) = \mathrm{e}^{-1/2}$; $\epsilon y'' + y'/x^2 + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = \mathrm{e}^{-1/3}$.

11 Il metodo WKB

Esercizio 1 Derivare i termini $S_1 - S_4$ nell'espansione WKB della equazione $\epsilon y'' = Q(x)y$.

Esercizio 2 Considerare le equazioni $\epsilon^2 y'' = (\sin x)y$, $\epsilon^2 y'' = (\sin x^2)y$, $\epsilon^2 y'' = [1 + \sin^2 x]y$. Per quali valori fissati di x, l'approssimazione di ottica fisica è appropriata? È l'approccio WKB accurato per $x \to \infty$?

Esercizio 3 Derivare l'approssimazione di ottica fisica per l'equazione $\epsilon^n y^{(n)} = Q(x)y$. Mostrare che se $Q(x)$ si comporta sufficientemente bene e $\lim_{x\to\infty} x^n Q(x) = \infty$, l'approssimazione di ottica fisica è appropriata per ϵ fissato e $x \to \infty$.

Esercizio 4 Determinare fase e ampiezza di onde riflessa e trasmessa ad uno zero quadratico di $Q(x)$ per l'equazione $\epsilon y'' = Q(x)y$.

Esercizio 5 Usare il metodo WKB per calcolare ad ordine ϵ la soluzione di $\epsilon y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, $a(x) > 0$, $y(0) = A$, $y(1) - B$.

Esercizio 6 Determinare le condizioni sull'energia di una particella semiclassica di massa m, che incide su un potenziale $U(x) = \hbar\sqrt{U_0/m}\delta(x)$ (verificare le dimensioni di questa espressione), per essere riflessa o trasmessa dallo stesso.

12 Il metodo multiscala

Esercizio 1 Studiare l'equazione di Van der Pol $\ddot{y}+y-\epsilon(1-y^2)\dot{y}=0$, $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$.

Esercizio 2 Lo stesso per l'equazione $\ddot{y}+y+\epsilon y^2\dot{y}=0$, $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$.

Esercizio 3 Considerare l'oscillatore nonlineare $\ddot{y}+\omega^2(\epsilon t)y+\epsilon y^3=0$, $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$. Trovare l'andamento di $t(t)$ a tempi $O(\epsilon^{-1})$.

Esercizio 4 Considerare l'equazione $\ddot{y}+y=\epsilon u^2$, $y(0)=2$, $\dot{y}(0)=0$. A che ordine in ϵ si produce la prima secolarità nella soluzione tramite teoria perturbativa regolare. Identificare il tempo scala necessario nell'approccio multiscala a eliminare questa secolarità e determinare la soluzione Y_0 del problema.

Esercizio 5 Trovare la soluzione generale a ordine dominante del sistema $\ddot{x}+2\epsilon y\dot{x}+x=0$, $\dot{y}=(\epsilon/2)\ln x^2$. Può essere utile il risultato $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\ln\cos^2\theta \mathrm{d}\theta=-\ln 4$.

La maggior parte degli esercizi in queste pagine sono tratti da:

- Esame del corso di metodi matematici della fisica, Università di Pisa; docente Prof. G.P. Cicogna
- Esercizi dal corso di metodi matematici della fisica, Phys. Dept. UCSC, docente Prof. G. Gaspari
- C.M. Bender & S.A. Orszag, Advanced mathematical methods for scientists and engineers
- E.J. Hinch, Perturbation methods