

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - PRIMA PARTE

Problema 1

Considerare la successione di funzioni

$$F_n(x) = \begin{cases} \sin nx & \text{se } 0 \leq x < \pi/n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la successione delle sue derivate $f_n(x) = F'_n(x)$.

- Trovare le funzioni F ed f a cui convergono puntualmente le due successioni. Verificare se si ha convergenza uniforme nei due casi. (2 punti)
- Dimostrare che $f_n \rightarrow 0$ nel senso delle distribuzioni. Suggerimento: utilizzando anche un esempio esplicito, mostrare che una funzione su cui f , agendo come distribuzione, desse risultato non nullo, non potrebbe avere le caratteristiche di una funzione test. (3 punti)

Problema 2

La risposta di un sistema fisico a un input $b(t)$ è governata dalla equazione differenziale $\ddot{y} + A\dot{y} + y = b$.

- Calcolare la trasformata di Fourier della funzione di Green \hat{G}_ω . (1 punto)
- Studiare la posizione nel piano complesso delle singolarità di \hat{G}_ω in funzione di A . Per quali valori di A il sistema è smorzato? (2 punti).
- Per quali valori di A , G_ω descrive un sistema causale? Cosa succede fuori da questo range di A ? È il sistema che "non è più causale" o succede qualcosa di diverso? Spiegare. (2 punti)

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

Problema 1

Vogliamo calcolare l'integrale $I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(nt) \exp(x \cos t)$, $x \rightarrow \infty$ usando il metodo di Laplace.

- Di solito il MAX è quadratico ma in mezzo al dominio, oppure all'estremo, e la derivata prima è non nulla. In questo caso il MAX è quadratico, ma a bordo dominio. Come fare? (1 punto)
- Calcolare $I_n(x)$ a leading order. (2 punti).

Problema 2

Considerare la seguente ODE: $y''' = xy$.

- Classificare le proprietà di analiticità (o singolarità) dei punti $x = 0$ e $x \rightarrow \infty$. (1 punto)
- Calcolare la soluzione leading order per $x \rightarrow \infty$, identificando il fattore di controllo. (2 punti)
- Studiare le proprietà in campo complesso della soluzione leading order, discutendo eventuali fenomeni di Stokes, tagli e posizione di linee di Stokes e antiStokes. (2 punti)
- La soluzione esatta ha tagli o no? Spiegare perché. (2 punti)