

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

Problema 1

Vogliamo calcolare l'integrale $I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(nt) \exp(x \cos t)$, $x \rightarrow \infty$ usando il metodo di Laplace.

- Di solito il MAX è quadratico ma in mezzo al dominio, oppure all'estremo, e la derivata prima è non nulla. In questo caso il MAX è quadratico, ma a bordo dominio. Come fare? (1 punto)
- Calcolare $I_n(x)$ a leading order. (2 punti).

Problema 2

Considerare la seguente ODE: $y''' = xy$.

- Classificare le proprietà di analiticità (o singolarità) dei punti $x = 0$ e $x \rightarrow \infty$. (1 punto)
- Calcolare la soluzione leading order per $x \rightarrow \infty$, identificando il fattore di controllo. (2 punti)
- Studiare le proprietà in campo complesso della soluzione leading order, discutendo eventuali fenomeni di Stokes, tagli e posizione di linee di Stokes e antiStokes. (2 punti)
- La soluzione esatta ha tagli o no? Spiegare perché. (2 punti)

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

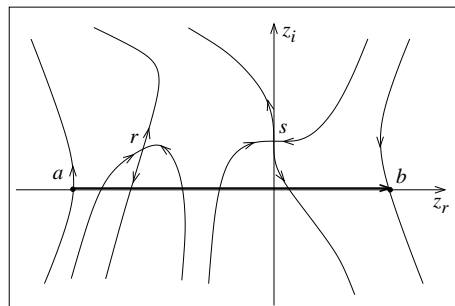
07/02/2011

Problema 1

Si consideri l'integrale

$$I(x) = \int_a^b f(t) \exp(x\phi(t)) dt. \quad x \in \mathbf{R}.$$

Le linee di MAX pendenza nel piano complesso per la parte reale di ϕ sono illustrate nella figura a lato (le frecce indicano direzione crescente).



- Si disegni il percorso d'integrazione per il calcolo di $I(x)$ attraverso il metodo di massima pendenza (steepest descent). (1.5 punti)
- Si supponga che il contributo dominante all'integrale provenga dal punto sella in $s = 2i$ e che, in sua prossimità, valga $f(z) = z^2$ e $\phi(z) = i - (z - s)^2 + O(|z - s|^3)$. Si calcoli quindi $I(x)$ a ordine dominante in x . (2.5 punti)
- Il punto sella in r è disegnato male. Perché? Spiegare. (1 punto)

Problema 2

Vogliamo applicare il metodo WKB all'equazione differenziale (in variabile reale)

$$\epsilon y''' + Q(x)y = 0.$$

- Si scriva l'equazione per l'iconale S . (2 punti)
- Utilizzando il metodo del bilancio dominante, si determini S a ordine più basso in ϵ per $\epsilon \rightarrow 0$ (fattore di controllo per y ; attenzione alle radici multiple). (2 punti)
- Supponendo $Q(x) > 0$, su tutto l'asse reale, dare una descrizione qualitativa delle soluzioni. (1 punto)
- (Opzionale) Calcolare anche S_1 e determinare y a ordine dominante in ϵ . (1 punto)

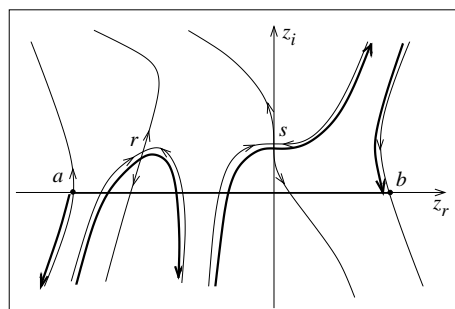
ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

07/02/2011

SOLUZIONE

Problema 1

Seguendo da a a b le linee di MAX pendenza in direzione decrescente, abbiamo il percorso indicato a lato.



- Abbiamo $\phi''(s) = -2$; la linea di MAX pendenza in s è effettivamente orizzontale e ci ritroviamo un integrale di Laplace standard:

$$I(x) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} f(s+t) \exp(x\phi(s+t)) dt = \sqrt{\frac{2\pi}{|x\phi''(s)|}} e^{x\phi(s)} f(s) = -4\sqrt{\pi/x} e^{ix}$$

- Le linee in entrata ed uscita si devono incontrare ad angolo retto. La ragione è che se $\phi''z^2$ è reale positivo (ϕ_r cresce uscendo), per avere $\phi''z^2$ reale negativo (ϕ_r cresce entrando) è necessario che z^2 cambi segno, cioè z sia moltiplicato per $\pm i$

Problema 2

- Per ottenere l'equazione iconale associata a $\epsilon y''' + Q(x)y = 0$, dobbiamo calcolare

$$y''' = (e^S)''' = (S' e^S)'' = [(S'' + (S')^2) e^S]' = [S''' + 2S' S'' + S'' S' + (S')^3] e^S$$

L'equazione iconale è pertanto

$$(S')^3 + 3S' S'' + S''' = -\epsilon^{-1} Q$$

- Sappiamo che in questo genere di equazioni, la potenza più alta di S vince sempre. Proviamo quindi da subito il bilancio

$$(S'_0)^3 = Q/\epsilon \Rightarrow S'_0 = (Q/\epsilon)^{1/3} \exp\{(2n+1)i\pi/3\}$$

Controllando nella equazione iconale, vediamo che va bene, perché $S''' = O(\epsilon^{-1/3})$ e $S'_0 S''_0 = O(\epsilon^{-2/3})$, mentre i termini $(S'_0)^3$ e Q/ϵ sono entrambi $O(\epsilon^{-1})$. Il fattore di controllo è quindi $\exp\{(2n+1)i\pi/3\} \int (Q(x)/\epsilon)^{1/3} dx$.

- Per $Q(x) > 0$, abbiamo una soluzione esponenzialmente decrescente a $x > 0$, corrispondente a $S'_0 = -(Q/\epsilon)^{1/3}$, e due crescenti oscillanti corrispondenti a $S'_0 = (Q/\epsilon)^{1/3}[1 \pm i\sqrt{3}]/2$.
- L'equazione per S_1 è

$$3(S'_0)^2 S'_1 + 3S'_0 S''_0 = 0 \Rightarrow S'_1 = -\frac{S''_0}{S'_0} = -(\ln S'_0)' \Rightarrow S_1 = -\ln S'_0$$

Otteniamo quindi

$$y(x) \sim C|Q(x)|^{-1/3} \exp \left\{ \exp[(2n+1)i\pi/3] \int (Q(x)/\epsilon)^{1/3} dx \right\}$$

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

15/03/2011

Problema 1

Si consideri l'equazione di Bessel modificata

$$x^2 w'' + x w' - (x^2 + \alpha^2) w = 0, \quad \alpha \in \mathbf{R};$$

- Si identifichino i punti singolari regolari ed irregolari dell'equazione. (1.5 punti).
- Si determini il primo termine della serie di Frobenius delle soluzioni nell'intorno del punto singolare regolare del problema. (1.5 punti)
- Per quali valori di α , la soluzione w richiede un taglio nel piano complesso? (Motivare la risposta). (0.5 punti).
- Si determini all'ordine dominante la soluzione dominante nell'intorno del punto singolare irregolare del problema. (Ci si accontenti del solo fattore di controllo). (2 punti)
- Identificare eventuali soluzioni sottodominanti nell'intorno del punto singolare irregolare (accontentarsi sempre del solo fattore di controllo) e determinare la posizione delle linee di Stokes del problema. (1.5 punti).

Problema 2

- Calcolare (scegliendo la tecnica più opportuna) la trasformata di Laplace \tilde{f}_s di $f(t) = t^\beta / (1 + t^2)^7$, $\beta > -1$, all'ordine dominante in s per $s \rightarrow \infty$. (2 punti).
- Calcolare l'ordine successivo ("next to leading order") nell'espansione. (1 punto).

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

15/03/2010

SOLUZIONE

Problema 1

- Abbiamo solo due possibili punti singolari: $x = 0$ e $x = \infty$. Per $x \rightarrow 0$ l'equazione diventa

$$x^2 w'' + xw' - \alpha^2 w = 0 \quad (1)$$

Abbiamo quindi una singolarità regolare. Per studiare $x \rightarrow \infty$, definiamo $y = 1/x$ così che l'equazione diventa $y^4 \ddot{w} + y^3 \dot{w} - (1 + \alpha^2 y^2)w = 0$ ($\dot{w} \equiv dw/dy$). Per $x \rightarrow \infty$, rimane $y^4 \ddot{w} + y^3 \dot{w} - w = 0$ e troviamo una singolarità irregolare.

- Sostituiamo $w = x^\beta + \dots$ nella (1) e troviamo $\beta^2 = \alpha^2$, cioè $\alpha = \pm\beta$.
- Un taglio diventa necessario quando α non è intero.
- Scriviamo $w = e^S$ così che l'equazione di Bessel diventa

$$S'' + (S')^2 + S'/x - 1 - (\alpha/x)^2 = 0$$

Il bilancio dominante è $(S')^2 = 1$, che mi dà $S(x) = \pm x$. Il segno positivo dà la soluzione dominante.

- Le soluzioni dominanti e sottodominanti si scambiano ruolo sull'asse immaginario. Abbiamo due linee di Stokes corrispondenti ai due semiassi immaginari.

Problema 2

- Abbiamo grazie al lemma di Watson:

$$\tilde{f}_s = \int_0^\infty \frac{t^\beta e^{-st}}{(1+t)^7} dt = \int_0^\infty t^\beta e^{-st} (1 - 7t^2 + \dots) dt \sim \int_0^\infty t^\beta e^{-st} dt = \Gamma(1 + \beta) s^{-\beta-1}$$

- Il termine successivo nell'espansione è evidentemente $-7\Gamma(3 + \beta)s^{-\beta-3}$.

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

05/04/2011

Problema 1

Si consideri l'equazione

$$\epsilon\psi'' = v(x)\psi' + \psi, \quad x \in [-1, 1] \quad (1)$$

dove $v(x)$ è analitica, con $v'(0) < 0$, $v(x) > 0$ per $x < 0$ e $v(x) < 0$ per $x > 0$. Si è visto ad esercitazioni che questo tipo di equazione genera uno strato limite attorno ad $x = 0$.

- Scrivere l'equazione per l'iconale e determinare la soluzione singolare nei pressi di $x = 0$, dove $v(x) \approx v'(0)x$. Accontentarsi del solo fattore di controllo. (2 punti).
- Determinare la larghezza Δx dello strato limite. (1.5 punti).
- Per ϵ fissato ed $x \rightarrow 0$, ci si potrebbe aspettare che il termine $v(x)\psi'$ possa diventare trascurabile nella (1). Perché? (suggerimento: considerare la natura del punto $x = 0$ nella equazione). (2 punti).
- Si risolva l'equazione $\epsilon\psi'' = \psi$ che si ottiene utilizzando l'approssimazione discussa al punto precedente e verificare che il suo regime di applicabilità è $|x| \ll \Delta x$. Si supponga la soluzione pari rispetto a $x = 0$. (2.5 punti).

Problema 2

Si consideri l'integrale

$$I(\epsilon) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1 + \epsilon x^n} dx.$$

Si verifichi che espandendo I attorno ad $\epsilon = 0$ si ottiene una serie asintotica (non convergente). (2 punti).

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

05/04/2010

SOLUZIONE

Problema 1

- L'equazione iconale è $\epsilon(S'' + (S')^2) = v'xS' + S$. Il fattore di controllo è determinato da $\epsilon(S'_0)^2 = v'xS'_0$ cioè $S_0 = \frac{v'}{2\epsilon}x^2$.
- Da $\psi(x) \sim \exp(\frac{v'}{2\epsilon}x^2 + S_1)$ troviamo $\Delta x \sim |\epsilon/v'|^{1/2}$.
- Il punto è regolare, quindi ψ è analitica in $x = 0$, che significa che ψ' rimane finito in un intorno di $x = 0$ e il limite $\lim_{x \rightarrow 0} v(x)\psi'(x)$ è definito e dà zero.
- $\psi(x) = A \cosh(x/\epsilon^{1/2})$.

La condizione di validità è $\psi(x) \gg v(x)\psi'(x)$, cioè $(v'x/\epsilon^{1/2}) \tanh x/\epsilon \ll 1$. Abbiamo che $x \ll \Delta x \Rightarrow x/\epsilon^{1/2} \ll 1 \Rightarrow \tanh x/\epsilon^{1/2} \sim x/\epsilon^{1/2}$. Abbiamo quindi $(v'x/\epsilon^{1/2}) \tanh x \sim v'x^2/\epsilon \ll 1$.

Problema 2

Il termine generico della serie è

$$(-\epsilon)^m \int_0^\infty x^{nm} e^{-x} dx = (-\epsilon)^m \Gamma(nm + 1)$$

e il fattore $\Gamma(nm + 1)$ cresce più rapidamente di qualsiasi potenza. Quindi, la serie non converge.

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

28/06/2011

Problema 1

Si consideri l'equazione

$$\ddot{x} + \epsilon \dot{x}(x^2 - 1) + x = 0; \quad x(0) = \epsilon, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (1)$$

Possiamo risolvere la (1) perturbativamente in ϵ , e scriviamo $x(t; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \delta_n(\epsilon, t)$ dove $\delta_{n+1}(\epsilon, t) = o(\delta_n(\epsilon, t))$ per $\epsilon \rightarrow 0$ a t fissato.

- Si utilizzi l'ansatz $\delta_n(\epsilon, t) = \epsilon^n$ e si scrivano (senza risolverle) le equazioni per x_n sino ad $n = 4$ (notare che evidentemente $x_0 = 0$). (1.5 punti).
- Selezionare le condizioni iniziali sulle equazioni al punto precedente ponendo $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_n(0) = \dot{x}_n(0) = 0$ per $n > 1$. Si determinino esplicitamente $x_n(t)$ per $n \leq 2$. (Occhio: la equazione per x_2 deve essere quella di un oscillatore forzato). (2 punti).
- Determinare l'intervallo di validità in t della serie perturbativa. (Quando è che $x_2 \epsilon^2$ e $x_1 \epsilon$ diventano dello stesso ordine?) (0.5 punti).
- Per tempi più grandi (ma non troppo) potrebbe essere possibile risolvere la (1) tenendo il termine $-\epsilon \dot{x}$, ma trascurando il termine cubico. Si risolva l'equazione all'ordine più basso non triviale (sia esso sempre $n = 1$) e si identifichi $\delta_1(\epsilon, t)$. (2 punti).
- Qual'è l'intervallo di validità di questa nuova espansione perturbativa? Che ordine in ϵ avrà raggiunto a questo punto x ? (1 punto).
- Si moltiplichi la (1) per \dot{x} , e si derivi l'equazione per l'energia dell'oscillatore $E = (\dot{x}^2 + x^2)/2$. (1.5 punti).
- (Opzionale) A partire da questa equazione dimostrare che le soluzioni della (1) rimangono limitate per $t \rightarrow \infty$. (1 punto).

Problema 2

Si calcoli a leading order in r per $r \rightarrow \infty$ l'integrale

$$\int_0^{\pi/(2r)} \exp(r \cos(rx)) dx.$$

(1.5 punti).

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

28/06/2010

SOLUZIONE

Problema 1

- $\ddot{x}_1 + x_1 = 0$; $\ddot{x}_2 + x_2 - \dot{x}_1 = 0$; $\ddot{x}_3 + x_3 - \dot{x}_2 = 0$; $\ddot{x}_4 + x_4 - \dot{x}_3 + \dot{x}_1 x_1^2 = 0$
- $x_1 = \cos t$; $x_2 = \frac{1}{2}(t \cos t - \sin t)$.
- $t \sim \epsilon^{-1}$
- L'equazione è $\ddot{x} - \epsilon \dot{x} + x = 0$, che ha soluzione $x(t) = A \exp(\epsilon t/2) \cos((1 - \epsilon^2/4)^{1/2} t)$.
Con la condizione iniziale $x(0) = \epsilon$, troviamo $\delta_1(\epsilon, t) = \epsilon \exp(\epsilon t/2)$ e $x_1(t) = \cos(t)$.
- La nuova serie perturbativa cessa di funzionare quando il termine cubico diventa dell'ordine di $\epsilon \dot{x}$. Questo si verifica per $x = O(1)$, e mi dà $t \sim \epsilon^{-1} \ln(\epsilon^{-1})$.
- Utilizzando $2\dot{x}\ddot{x} = (d/dt)\dot{x}^2$ e $x\dot{x} = 2(d/dt)x^2$, otteniamo $\dot{E} = -\epsilon \dot{x}^2(x^2 - 1)$.
- Per $|x| > 1$ avremmo $\dot{E} < 0$ che significa che $x^2 + \dot{x}^2$ deve decrescere. Se x^2 cresce, \dot{x}^2 deve decrescere a zero; ma questo blocca la crescita di x^2 .

Problema 2

$$I(r) \sim r^{-1} \int_0^\infty \exp(r \cos x) = (2r)^{-1} \int_{-\infty}^\infty \exp(r \cos x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2r^3}} e^r$$

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

20/12/2011

Problema 1

Vogliamo studiare il comportamento asintotico per $x \rightarrow +\infty$ dell'integrale

$$I(x) = \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \exp(x \cos t) dt.$$

- Identificare il punto (i punti) da dove proviene il contributo dominante nel calcolo dell'integrale con il metodo di Laplace. (1 punto).
- Calcolare l'integrale a ordine dominante. (2 punti).
- Calcolare lo stesso integrale a ordine dominante nel caso l'intervallo di integrazione sia $[-0.1, 2\pi + 0.1]$. (Attenzione!) (2 punti).
- (Opzionale). Sempre nel caso il dominio sia $[-0.1, 2\pi + 0.1]$, calcolare l'ordine successivo nella serie asintotica di questo integrale [ricordo il risultato $(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2/2} dt = 3$]. (2 punti).

Problema 2

Considerare l'equazione differenziale

$$x^2 y'' + (3x - 1)y' + y = 0$$

- Si identifichino i punti singolari regolari e irregolari del problema. (1 punto).
- Si determinino le soluzioni dominante e sottodominante (per $x > 0$) nell'intorno del punto singolare irregolare del problema (ci si accontenti del solo fattore di controllo). (2 punti).
- Identificare le linee di Stokes per la soluzione. (1 punto).
- Ci sono fenomeni di Stokes? (1 punto).

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

20/12/2011

SOLUZIONE

Problema 1

- L'argomento dell'esponenziale ha massimo ai due estremi del dominio di integrazione. Sono due massimi quadratici ("caso A") ma trovandosi agli estremi del dominio contribuiscono solo per metà di quello che farebbero se si trovassero al suo interno.

•

$$\begin{aligned} I(x) &\sim \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + (2\pi + t)^2] \exp(x \cos t) dt \sim \frac{1 + 4\pi^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x(1 - t^2/2)) dt \\ &= (1 + 4\pi^2) \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^x \end{aligned}$$

- Essendo i massimi contenuti nel dominio di integrazione, l'integrale a ordine dominante vale il doppio che nel caso precedente.

•

$$\begin{aligned} I(x) &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + 4\pi^2 + t^2] \exp \left\{ x \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} \right) \right\} \\ &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1 + 4\pi^2) \left(1 + x \frac{t^4}{24} \right) + t^2 \right] \exp \{ x(1 - t^2/2) \} \\ &\sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^x \left[(1 + 4\pi^2) \left(1 + \frac{1}{8x} \right) + \frac{1}{x} \right] \end{aligned}$$

Problema 2

- Vicino allo zero l'equazione diventa $x^2 y'' - y' + y = 0$. In zero c'è una singolarità irregolare. Riscrivendo l'equazione originaria in funzione di $w = 1/x$, troviamo $w^2 y'' - w(1-w)y' + y = 0$ che per $w \rightarrow 0$ diventa $w^2 y'' - wy' + y = 0$. Per $x \rightarrow \infty$ troviamo quindi una singolarità regolare.
- Utilizzando la solita rappresentazione iconale $y = e^S$, abbiamo $y' = S'y$, $y'' = (S'' + (S')^2)y$, da cui l'equazione iconale $S'' + (S')^2 - S'/x^2 + 1/x^2 = 0$. Utilizzando l'ansatz $S = ax^b$, troviamo l'equazione $ab(b-1)x^{b-2} + (ab)^2 x^{2b-2} - abx^{b-3} + x^{-2} = 0$. Per

$b < 0$, il bilancio dominante è fra $(ab)^2 x^{2b-2}$ e abx^{b-3} che ci dà $b = a = -1$. Per $b \geq 0$, il bilancio dominante è fra $-abx^{b-3}$ e x^{-2} che ci dà $b = a = 1$, che porta a una soluzione regolare in zero. La soluzione dominante è quest'ultima.

- Ci sono due linee di Stokes in $\arg(x) = \pm\pi/2$.
- Passando le linee di Stokes non c'è scambio di ruolo fra soluzioni dominanti e sottominanti. In altre parole, non ci sono fenomeni di Stokes.

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

16/03/2012

Problema 1

Si consideri l'equazione

$$\ddot{x} + (1 + \epsilon \cos t + \epsilon^2 k)x = 0. \quad (1)$$

e l'ansatz multiscale

$$x(t) = \sum_n x_n(t_0, t_1, t_2, \dots)\epsilon^n = \sum_n x_n(t, \epsilon t, \epsilon^2 t, \dots)\epsilon^n \quad (2)$$

- Si scrivano esplicitamente le equazioni che si ottengono espandendo in ϵ la (1) con l'ansatz (2) sino a $O(\epsilon^2)$. (2 punti).
- L'equazioni così ottenute sono quelle per un oscillatore armonico smorzato. Spiegare a parole (massimo tre righe) perché a $O(\epsilon)$ si possono escludere effetti secolari (risonanze), mentre questi saranno probabilmente presenti a $O(\epsilon^2)$. (1 punto).
- La soluzione di queste equazioni conduce ad una espansione perturbativa per $x(t)$. Si consideri il problema ristretto ad un intervallo finito $[0, T]$, con T indipendente da ϵ . Si tratta di un'espansione perturbativa regolare o singolare? L'analoga espansione ottenuta a partire dall'ansatz standard $x(t) = \sum_n x_n(t)\epsilon^n$ Sarebbe di tipo regolare o singolare? Argomentare in massimo tre righe la risposta. (1 punto).

Problema 2 La funzione di Airy $\text{Ai}(z)$ ha rappresentazione integrale

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{tz - \frac{1}{3}t^3} dt$$

dove il percorso Γ parte ad ∞ con fase $-\frac{2}{3}\pi$ e termina di nuovo ad ∞ con fase $\frac{2}{3}\pi$. Vogliamo calcolare questo integrale per z reale grande e positivo con il metodo di punto sella.

- Identificare i punti sella ed il percorso di integrazione. Fornire uno schizzo del percorso d'integrazione e delle linee di massima pendenza per la parte reale di $tz - \frac{1}{3}t^3$. (3 punti).
- Si calcoli a ordine dominante l'integrale. (1 punto).

Problema 3 Sommare con la tecnica che si ritiene più opportuna la serie divergente $S = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(-3/2)^n$. (2 punti).

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

16/03/2012

SOLUZIONE

Problema 1

- Scrivendo

$$d^2/dt^2 = \partial_0^2 + \epsilon 2\partial_0\partial_1 + \epsilon^2 (\partial_1^2 + 2\partial_0\partial_2) + \dots;$$

abbiamo

$$\begin{aligned} O(\epsilon^0) : \quad & (\partial_0^2 + 1)x_0 = 0; & O(\epsilon) : \quad & (\partial_0^2 + 1)x_1 = -(2\partial_1\partial_0 + \cos t)x_0; \\ O(\epsilon^2) : \quad & (\partial_0^2 + 1)x_2 = -(2\partial_1\partial_0 + \cos t)x_1 - (\partial_1^2 + 2\partial_0\partial_2 + k)x_0. \end{aligned}$$

- A $O(\epsilon)$, il termine non omogeneo $\propto x_0$ a lato destro contiene armoniche pari $(\cos t)^2$ e $\sin t \cos t$, mentre la risonanza proviene da termini $\propto \cos t$ oppure $\propto \sin t$. Ad ordine successivo abbiamo termini $\propto (\cos t)^3, \dots$ che danno armoniche di ordine uno e tre.
- In entrambi i casi si tratta di una espansione regolare; si tratta di un'equazione differenziale lineare in cui il termine piccolo non è alla derivata più alta.

Problema 2

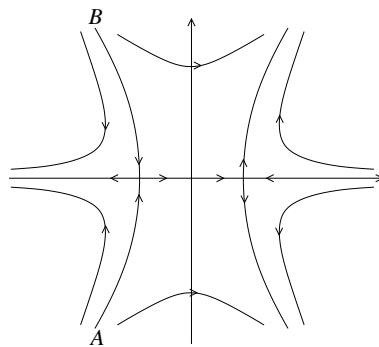


Figura 1: Linee di massima pendenza per $Re[\phi_z(t)] \equiv Re[zt - t^3/3]$; le frecce sono lungo la direzione crescente; i punti sella sono in $\bar{t} = \pm\sqrt{z}$. Notare che per $t \rightarrow \infty$ $\phi_z(t) \sim t^3/3$, che è reale per $\arg z = n\pi/3$; pertanto, per $t \rightarrow \infty$, queste sono anche linee di massima pendenza per $Re(\phi_z(t))$. Il percorso d'integrazione è la linea AB .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\phi_z(t)} dt &\sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\phi_z(-\sqrt{z}) - \frac{1}{2}\phi_z''(-\sqrt{z})\tilde{t}^2\right\} d\tilde{t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{\frac{2}{3}} - \sqrt{z}\tilde{t}^2\right) d\tilde{t} = \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{2}{3}}}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} \end{aligned}$$

Problema 3

La soluzione più semplice è quella di cercare una funzione che ha la $f(z)$ come serie di Taylor (somma di Eulero). Abbiamo $g(z) = (1+z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$. Da qui troviamo subito

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)(-z)^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(-z)^{n-2} = g''(z) = 2(1+z)^{-3}$$

E quindi $S = g(3/2) = 2(2/5)^3 = 16/125$.

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

03/04/2012

Problema 1

Si consideri l'equazione

$$y'' + x^{-3/2}y' - x^{-2}y = 0 \quad (1)$$

Com'è noto, nei pressi di un punto singolare regolare, la soluzione di una ODE può essere espressa nella forma di una serie di Frobenius.

- Si studino le proprietà di regolarità all'infinito della (1). (1 punto).
- Si supponga che la y possa essere espressa nella forma di una serie di potenze con esponenti generici (non necessariamente di Frobenius) e si determini la soluzione a ordine dominante della (1) per $x \rightarrow \infty$. (2 punti).
- Si calcoli anche l'ordine successivo nella espansione. (2 punti).
- Abbiamo a che fare con una serie di Frobenius? Spiegare perché si è (o non si è) ottenuta una serie di Frobenius (e si corregga nel caso la risposta fornita al primo punto!). (1 punto).

Problema 2

Si consideri l'integrale

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta \quad (2)$$

- Lo si riconduca ad un integrale di Laplace in campo complesso. (1 punto).
- Si identifichi il punto sella nell'integrando e si determinino le due direzioni ortogonali di massima pendenza per la parte reale. (1 punto).
- Si dia per buono che sia possibile connettere i due estremi di integrazione in (2) al punto sella, e che il contributo dominante all'integrale sia nel punto sella (e non negli estremi). Si calcoli quindi $J_0(x)$ a ordine dominante per $x \rightarrow \infty$. (2 punti).

ESAME DI METODI MATEMATICI AVANZATI - SECONDA PARTE

03/04/2012

SOLUZIONE

Problema 1

- Il termine $x^{-3/2}y'$ è singolare in per $x \rightarrow \infty$ e lo rimane qualsiasi sia la potenza intera di x per cui viene moltiplicato. Abbiamo una singolarità irregolare all'infinito.
- Ponendo $y(x) \sim y_0(x) = Ax^\alpha$, abbiamo a ordine dominante $y_0'' + x^{-3/2}y_0' - x^{-2}y_0 = A[\alpha(\alpha - 1) + x^{-1/2}\alpha - 1]x^{\alpha-2} \sim A[\alpha(\alpha - 1) - 1]x^{\alpha-2} = 0 \Rightarrow \alpha = (1 + \sqrt{5})/2$.
- Poniamo all'ordine successivo $y_1 = y - y_0 \sim Bx^\beta$ e sostituiamo: $y_1'' + x^{-3/2}y_1' - x^{-2}y_1 = B[\beta(\beta - 1) - 1]x^{\beta-2} + A\alpha x^{\alpha-5/2}$. Eguagliando le potenze troviamo $\beta = \alpha - 1/2$, da cui $B = A\alpha/(\beta^2 - \beta - 1)$.
- Non è una serie di Frobenius. Non c'è da sorprendersi di questo fatto perché la singolarità all'infinito è irregolare.

Problema 2

- Banalmente, sfruttando la simmetria del dominio di integrazione:

$$J_0(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(ix \cos \theta) d\theta \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(x\phi(\theta)) d\theta.$$

- La funzione $\phi(t)$ ha punti sella in $\theta = n\pi$. L'unico che ci può interessare è quello in $\theta = 0$; là abbiamo $\phi(\theta) = i \cos \theta \simeq i - i\theta^2/2$, e quindi linee di max decrescenza (all'infinito) lungo $\arg \theta = -\pi/4$.
- Abbiamo

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(x(i - \theta^2/2)) e^{-i\pi/4} d\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4)$$